

Propriétés asymptotiques de certaines familles de graphes à mineurs exclus ¹

Kerstin Weller
travail en commun avec Mireille Bousquet-Mélou

Department of Statistics
University of Oxford

Rencontre ALEA, Mars 2013



¹arXiv:1303.3836, on-line depuis 18/3/2013.

Questions

LE MODÈLE UNIFORME

Soit \mathcal{A} une *classe* de graphes, donc un ensemble de graphes étiquetés fermé par isomorphisme. Le graphe 'typique' à n sommets est pris uniformément dans l'ensemble de tous les graphes à n sommets de \mathcal{A} .

Notation: $R_n \in_u \mathcal{A}$.

QUESTIONS TYPIQUES

- ▶ Nombre de graphes (connexes) à n sommets

Questions

LE MODÈLE UNIFORME

Soit \mathcal{A} une *classe* de graphes, donc un ensemble de graphes étiquetés fermé par isomorphisme. Le graphe 'typique' à n sommets est pris uniformément dans l'ensemble de tous les graphes à n sommets de \mathcal{A} .

Notation: $R_n \in_u \mathcal{A}$.

QUESTIONS TYPIQUES

- ▶ Nombre de graphes (connexes) à n sommets
- ▶ Probabilité que $R_n \in_u \mathcal{A}$ soit connexe et la loi limite du nombre de composantes de R_n

Questions

LE MODÈLE UNIFORME

Soit \mathcal{A} une *classe* de graphes, donc un ensemble de graphes étiquetés fermé par isomorphisme. Le graphe 'typique' à n sommets est pris uniformément dans l'ensemble de tous les graphes à n sommets de \mathcal{A} .

Notation: $R_n \in_u \mathcal{A}$.

QUESTIONS TYPIQUES

- ▶ Nombre de graphes (connexes) à n sommets
- ▶ Probabilité que $R_n \in_u \mathcal{A}$ soit connexe et la loi limite du nombre de composantes de R_n
- ▶ Taille de la composante qui contient le sommet étiqueté 1

Questions

LE MODÈLE UNIFORME

Soit \mathcal{A} une *classe* de graphes, donc un ensemble de graphes étiquetés fermé par isomorphisme. Le graphe 'typique' à n sommets est pris uniformément dans l'ensemble de tous les graphes à n sommets de \mathcal{A} .

Notation: $R_n \in_u \mathcal{A}$.

QUESTIONS TYPIQUES

- ▶ Nombre de graphes (connexes) à n sommets
- ▶ Probabilité que $R_n \in_u \mathcal{A}$ soit connexe et la loi limite du nombre de composantes de R_n
- ▶ Taille de la composante qui contient le sommet étiqueté 1
- ▶ Taille de la plus grande composante

Sommaire

- ▶ Notations et introduction
- ▶ Quand les mineurs exclus sont 2-connexes
- ▶ Les graphes dominés par les arbres
- ▶ Exclure le nœud papillon
- ▶ Les forêts de chemins et de chenilles

Sommaire

- ▶ Notations et introduction
- ▶ Quand les mineurs exclus sont 2-connexes
- ▶ Les graphes dominés par les arbres
- ▶ Exclure le nœud papillon
- ▶ Les forêts de chemins et de chenilles

Vitesse de divergence de $C(z)$ à la singularité dominante



Notation

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

- ▶ \mathcal{A} - classe de graphes étiquetés.
- ▶ $A_n = |\mathcal{A}_n|$ - nombre de graphes à n sommets.
- ▶ $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ - graphes connexes.
- ▶ $\kappa(R_n)$ - nombre de composantes de $R_n \in_u \mathcal{A}$.
- ▶ S_n - taille de la composante qui contient le sommet étiqueté 1
- ▶ L_n - taille de la plus grande composante
- ▶ \mathcal{A} est *décomposable* : un graphe est dans \mathcal{A} si et seulement si chaque composante est dans \mathcal{A} .
- ▶ \mathcal{A} est *propre* : \mathcal{A} ne contient pas tous les graphes.

La série $C(z)$ contient toute l'information

Soit $\mathcal{A} = SET(\mathcal{C})$ une classe décomposable de graphes. On a

$$A(z, u) = \sum_{G \in \mathcal{A}} u^{\kappa(G)} \frac{z^{|G|}}{|G|!} = e^{u \cdot C(z)}.$$

La série $C(z)$ contient toute l'information

Soit $\mathcal{A} = SET(\mathcal{C})$ une classe décomposable de graphes. On a

$$A(z, u) = \sum_{G \in \mathcal{A}} u^{\kappa(G)} \frac{z^{|G|}}{|G|!} = e^{u \cdot C(z)}.$$

Pour la taille $s(G)$ de la composante qui contient 1 on a

$$\bar{A}(z, v) = \sum_{G \in \mathcal{A}, G \neq \emptyset} v^{s(G)-1} \frac{z^{|G|-1}}{(|G|-1)!} = C'(zv)A(z)$$

La série $C(z)$ contient toute l'information

Soit $\mathcal{A} = SET(\mathcal{C})$ une classe décomposable de graphes. On a

$$A(z, u) = \sum_{G \in \mathcal{A}} u^{\kappa(G)} \frac{z^{|G|}}{|G|!} = e^{u \cdot C(z)}.$$

Pour la taille $s(G)$ de la composante qui contient 1 on a

$$\bar{A}(z, v) = \sum_{G \in \mathcal{A}, G \neq \emptyset} v^{s(G)-1} \frac{z^{|G|-1}}{(|G|-1)!} = C'(zv)A(z)$$

et le $i^{\text{ème}}$ moment factoriel de $S_n - 1$ est donné par

$$\mathbb{E}((S_n - 1) \cdots (S_n - i)) = \frac{[z^{n-1}] \frac{\partial^i \bar{A}}{\partial v^i}(z, 1)}{[z^{n-1}] \bar{A}(z, 1)} = \frac{[z^{n-i-1}] C^{(i+1)}(z) A(z)}{n [z^n] A(z)}.$$

Introduction : Arbres et graphes planaires

Une forêt typique

Théorème (Rényi 1959)

Soit \mathcal{A} la classe des forêts.

Une forêt typique

Théorème (Rényi 1959)

Soit \mathcal{A} la classe des forêts. On a

Une forêt typique

Théorème (Rényi 1959)

Soit \mathcal{A} la classe des forêts. On a

$$C_n = n^{n-2} \sim \frac{n^{-5/2} e^n}{\sqrt{2\pi}} n! \text{ et } A_n \sim e^{\frac{1}{2}} n^{n-2}$$

Une forêt typique

Théorème (Rényi 1959)

Soit \mathcal{A} la classe des forêts. On a

$$C_n = n^{n-2} \sim \frac{n^{-5/2} e^n}{\sqrt{2\pi}} n! \text{ et } A_n \sim e^{\frac{1}{2}} n^{n-2}$$

et pour $n \rightarrow \infty$ le nombre de composantes de $R_n \in_u \mathcal{A}$ suit une loi de Poisson

$$\kappa(R_n) \sim 1 + \text{Po} \left(\frac{1}{2} \right).$$

Les graphes planaires

Soit \mathcal{A} la classe des graphes planaires.

Les graphes planaires

Soit \mathcal{A} la classe des graphes planaires.

Théorème (Giménez et Noy 2005)

Pour $n \rightarrow \infty$



$$A_n \sim g \cdot n^{-7/2} \gamma^n n!$$

avec $g \approx 0.49$ et $\gamma \approx 27.22$.

Les graphes planaires

Soit \mathcal{A} la classe des graphes planaires.

Théorème (Giménez et Noy 2005)

Pour $n \rightarrow \infty$



$$A_n \sim g \cdot n^{-7/2} \gamma^n n!$$

avec $g \approx 0.49$ et $\gamma \approx 27.22$.



$$\kappa(R_n) \sim 1 + \text{Po}(\nu)$$

avec $\nu \approx 0.0374$.

Caractérisation des graphes planaires

Définition

Un mineur d'un graphe G est un sous-graphe obtenu par contraction ou suppression d'arêtes dans G , suppression de sommets isolés et suppression de toutes les arêtes multiples.

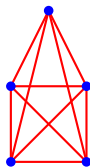
Caractérisation des graphes planaires

Définition

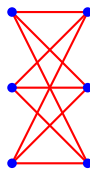
Un mineur d'un graphe G est un sous-graphe obtenu par contraction ou suppression d'arêtes dans G , suppression de sommets isolés et suppression de toutes les arêtes multiples.

Théorème (Wagner '40)

Un graphe G est planaire si et seulement si il ne contient ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineur.



K_5 .



$K_{3,3}$.

Classe de graphes fermée par mineurs

Classe de graphes fermée par mineurs

Définition

Un ensemble de graphes \mathcal{A} est fermé par mineurs si et seulement si tous les mineurs des graphes $G \in \mathcal{A}$ sont aussi dans \mathcal{A} .

Théorème (Robertson et Seymour)

Chaque classe fermée par mineurs peut être décrite par une liste finie de mineurs exclus.

Classe de graphes fermée par mineurs

Définition

Un ensemble de graphes \mathcal{A} est fermé par mineurs si et seulement si tous les mineurs des graphes $G \in \mathcal{A}$ sont aussi dans \mathcal{A} .

Théorème (Robertson et Seymour)

Chaque classe fermée par mineurs peut être décrite par une liste finie de mineurs exclus.

Pour caractériser la classe \mathcal{A} il suffit de donner la liste des mineurs exclus.

Notation : $Ex(\text{liste des mineurs})$.

Classe de graphes fermée par mineurs

Théorème (Norine et al. 2008/2011)

Soit \mathcal{A} une classe de graphes propre fermée par mineurs. On a

$$\limsup_n \left(\frac{A_n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Classe de graphes fermée par mineurs

Théorème (Norine et al. 2008/2011)

Soit \mathcal{A} une classe de graphes propre fermée par mineurs. On a

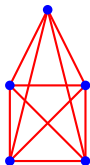
$$\limsup_n \left(\frac{A_n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Conjecture : chaque classe fermée par mineurs a une *constante de croissance*

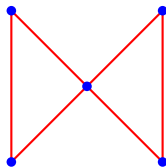
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = c.$$

Le cas 2-connexe

Le cas 2-connexe



K_5 est 2-connexe.



Le nœud papillon n'est pas 2-connexe.

Singularité dominante de $C(z)$: $C(\rho) < \infty$.

Les classes fermées par mineurs - le cas 2-connexe

Théorème (McDiarmid et al. 2005, McDiarmid 2010, Addario-Berry et al. 2012)

Soit \mathcal{A} une classe de graphes (propre) fermée par mineurs. On suppose que tous les mineurs exclus sont **2-connexes**. On a

- ▶ une constante de croissance $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = c = \frac{1}{\rho}$.

Les classes fermées par mineurs - le cas 2-connexe

Théorème (McDiarmid et al. 2005, McDiarmid 2010, Addario-Berry et al. 2012)

Soit \mathcal{A} une classe de graphes (propre) fermée par mineurs. On suppose que tous les mineurs exclus sont **2-connexes**. On a

- ▶ une constante de croissance $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = c = \frac{1}{\rho}$.
- ▶ $\kappa(R_n) \sim 1 + \text{Po}(C(\rho))$ et $\frac{1}{2} \geq C(\rho)$.

Les classes fermées par mineurs - le cas 2-connexe

Théorème (McDiarmid et al. 2005, McDiarmid 2010, Addario-Berry et al. 2012)

Soit \mathcal{A} une classe de graphes (propre) fermée par mineurs. On suppose que tous les mineurs exclus sont **2-connexes**. On a

- ▶ une constante de croissance $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = c = \frac{1}{\rho}$.
- ▶ $\kappa(R_n) \sim 1 + \text{Po}(C(\rho))$ et $\frac{1}{2} \geq C(\rho)$.
- ▶ $n - L_n$, $n - S_n$ converge vers la même loi discrète.

Ingrédients importants de la preuve:

- ▶ $C(\rho) < \infty$.
- ▶ C est lisse, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nC_{n-1}}{C_n} = \frac{1}{\rho}$ existe.

Les classes fermées par mineurs - le cas 2-connexe

Proposition (La composante qui contient le sommet 1)


La variable aléatoire $n - S_n$ converge vers une loi limite discrète X donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{A(\rho)} \frac{A_k \rho^k}{k!}.$$

Qu'est-ce qui se passe quand les mineurs exclus ne sont pas
2-connexes?¹

¹M. Bousquet-Mélou et W.

Vue globale des résultats

Mineurs exclus	2-conn. ou 	\diamond et \bowtie	\bowtie	\wedge ou \triangle et \vee	tous les graphes conn. à $k + 1$ sommets
$C(\rho)$	$< \infty$	$\log \frac{1}{1-z/\rho}$	$\frac{1}{\sqrt{1-z/\rho}}$	$\frac{1}{1-z/\rho}$	entière
$\mathbb{P}(\text{conn.})$	$\rightarrow p > 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\kappa(R_n)$	$O(1)$ Poisson	$\log n$ gaussien	$n^{1/3}$ gaussien	$n^{1/2}$ gaussien	n/k gaussien
S_n	$n - F_n$ $F_n \rightarrow \text{discr.}$	n $\frac{1}{4}(1-x)^{-3/4}$	$n^{2/3}$ $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}e^{-x}$	$n^{1/2}$ xe^{-x}	k Dirac
L_n	$n - F_n$ $F_n \rightarrow \text{discr.}$	n PD ^[1]	?	$n^{1/2} \log n$ Gumbel	k Dirac

Graphes dominés par les arbres

Définition

On dit qu'une classe de graphes $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ fermée par mineurs est dominée par les arbres si

- 1. tous les arbres sont dans \mathcal{C} ,*
- 2. le rayon de la série génératrice $D(z)$ qui compte tous les graphes connexes qui ne sont pas des arbres est $> 1/e$.*

Graphes dominés par les arbres

Définition

On dit qu'une classe de graphes $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ fermée par mineurs est dominée par les arbres si

1. tous les arbres sont dans \mathcal{C} ,
2. le rayon de la série génératrice $D(z)$ qui compte tous les graphes connexes qui ne sont pas des arbres est $> 1/e$.

Proposition

Soit \mathcal{A} une classe dominée par les arbres. On a

$$\blacktriangleright C_n \sim n! \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{5/2}}} \text{ et } A_n \sim A(1/e)C_n$$

Graphes dominés par les arbres

Définition

On dit qu'une classe de graphes $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ fermée par mineurs est dominée par les arbres si

1. tous les arbres sont dans \mathcal{C} ,
2. le rayon de la série génératrice $D(z)$ qui compte tous les graphes connexes qui ne sont pas des arbres est $> 1/e$.

Proposition

Soit \mathcal{A} une classe dominée par les arbres. On a

- ▶ $C_n \sim n! \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{5/2}}}$ et $A_n \sim A(1/e)C_n$
- ▶ $\kappa(R_n) \sim 1 + \text{Po}(C(1/e))$

Graphes dominés par les arbres

Définition

On dit qu'une classe de graphes $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ fermée par mineurs est dominée par les arbres si

1. tous les arbres sont dans \mathcal{C} ,
2. le rayon de la série génératrice $D(z)$ qui compte tous les graphes connexes qui ne sont pas des arbres est $> 1/e$.

Proposition

Soit \mathcal{A} une classe dominée par les arbres. On a

- ▶ $C_n \sim n! \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{5/2}}}$ et $A_n \sim A(1/e)C_n$
- ▶ $\kappa(R_n) \sim 1 + \text{Po}(C(1/e))$
- ▶ $n - S_n \rightarrow X$ avec $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{A(1/e)} \frac{A_k e^{-k}}{k!}$

Graphes dominés par les arbres

Définition

On dit qu'une classe de graphes $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ fermée par mineurs est dominée par les arbres si

1. tous les arbres sont dans \mathcal{C} ,
2. le rayon de la série génératrice $D(z)$ qui compte tous les graphes connexes qui ne sont pas des arbres est $> 1/e$.

Proposition

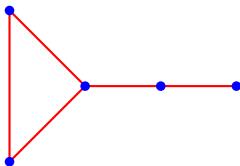
Soit \mathcal{A} une classe dominée par les arbres. On a

- ▶ $C_n \sim n! \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n^{5/2}}}$ et $A_n \sim A(1/e)C_n$
- ▶ $\kappa(R_n) \sim 1 + \text{Po}(C(1/e))$
- ▶ $n - S_n \rightarrow X$ avec $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{A(1/e)} \frac{A_k e^{-k}}{k!}$
- ▶ Pareil pour $n - L_n$.

Un exemple : les cuillères

Proposition

Soit $k \geq 1$. Soit \mathcal{A} une classe décomposable qui contient tous les arbres mais qui exclut la k -cuillère comme mineur. Alors, \mathcal{A} est dominée par les arbres.



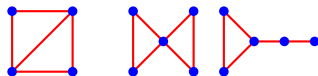
La 3-cuillère.

Un exemple : les cuillères

Proposition

Soit $k \geq 1$. Soit \mathcal{A} une classe décomposable qui contient tous les arbres mais qui exclut la k -cuillère comme mineur. Dans ce cas, \mathcal{A} est dominée par les arbres.

Un exemple concret : pour k fixé toutes les classes $\mathcal{A}^{[k]} = \text{Ex}(K_4 - e, \text{nœud papillon}, k\text{-cuillère})$ sont dominées par les arbres.



Les mineurs exclus de $\mathcal{A}^{[k]}$.

Remarque: $C^{[k]}(1/e) > \frac{1}{2} = U(1/e)$ trees.

Le cas limite - pas de ressemblance avec les forêts

Proposition

Soit $\mathcal{A}_\infty = \text{Ex}(K_4 - e, \text{nœud papillon})$. On obtient



$$A_n \sim \frac{1}{(2e)^{1/4} \Gamma(1/4)} e^n n^{-3/4} n!$$



$$\frac{\kappa(R_n) - \frac{\ln(n)}{4}}{\sqrt{\frac{\ln(n)}{4}}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Le cas limite - pas de ressemblance avec les forêts

Proposition

- ▶ S_n/n converge vers *une loi bêta(1,1/4)* de densité $(1-x)^{-3/4}/4$ sur $[0, 1]$.

Le cas limite - pas de ressemblance avec les forêts

Proposition

- ▶ S_n/n converge vers *une loi bêta(1,1/4)* de densité $(1-x)^{-3/4}/4$ sur $[0, 1]$.
- ▶ L_n/n converge vers *la première composante d'une distribution de Poisson-Dirichlet* de paramètre $1/4$: pour $x \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}(L_n < xn) \rightarrow \rho(1/x),$$

ou $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ est l'unique fonction telle que $\rho(x) = 1$ pour $x \in [0, 1]$ et pour $x > 1$,
 $x^{1/4}\rho'(x) + \frac{1}{4}(x-1)^{-3/4}\rho(x-1) = 0$.

Preuve : La série génératrice est $A(z) \sim \frac{1}{(2e)^{1/4}(1-ez)^{1/4}}$.

Le cas limite - pas de ressemblance avec les forêts

Proposition

- ▶ S_n/n converge vers *une loi bêta(1,1/4)* de densité $(1-x)^{-3/4}/4$ sur $[0, 1]$.
- ▶ L_n/n converge vers *la première composante d'une distribution de Poisson-Dirichlet* de paramètre $1/4$: pour $x \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}(L_n < xn) \rightarrow \rho(1/x),$$

ou $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ est l'unique fonction telle que $\rho(x) = 1$ pour $x \in [0, 1]$ et pour $x > 1$,
 $x^{1/4}\rho'(x) + \frac{1}{4}(x-1)^{-3/4}\rho(x-1) = 0$.

Preuve : La série génératrice est $A(z) \sim \frac{1}{(2e)^{1/4}(1-ez)^{1/4}}$. Les structures logarithmiques ont été étudié par Arratia et al..

Le nœud papillon

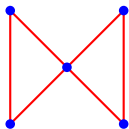


Le nœud papillon

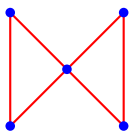


Singularité dominante de $C(z)$: $\frac{1}{\sqrt{1-z/\rho}}$

Exclure le nœud papillon comme mineur



Exclure le nœud papillon comme mineur



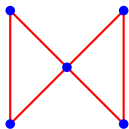
Proposition

Soit $\mathcal{A} = \text{Ex}(\text{nœud papillon})$. On obtient



$$C_n \sim n! \frac{(e - 5/4)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{\sqrt{n}}$$

Exclure le nœud papillon comme mineur



Proposition

Soit $\mathcal{A} = \text{Ex}(\text{ nœud papillon })$. On obtient



$$C_n \sim n! \frac{(e - 5/4)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{\sqrt{n}}$$



$$A_n \sim n! \frac{(e - 5/4)^{1/6} e^{19/8 - 11e/3}}{\sqrt{6\pi}} \frac{e^n}{n^{2/3}} e^{3(e-5/4)^{2/3} n^{1/3}/2}.$$

Le comportement des composantes – sans nœud papillon

Proposition

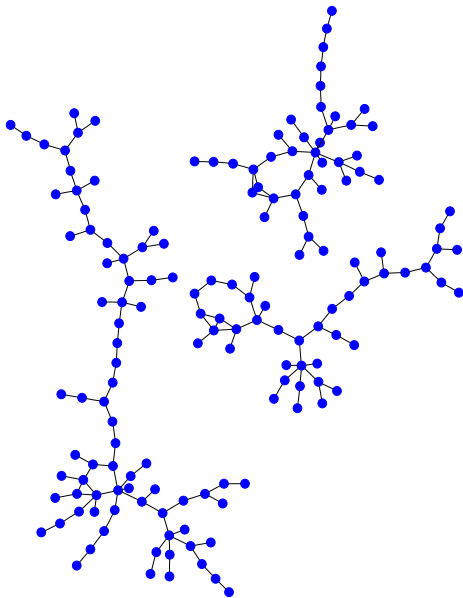
Le nombre de composantes vérifie

$$\frac{\kappa(R_n) - (e - 5/4)^{2/3} n^{1/3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}(e - 5/4)^{2/3} n^{1/3}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Pour la taille de la composante qui contient 1 on a

$$\frac{(e - 5/4)^{2/3} S_n}{(2n^{2/3})} \sim \text{Gamma}(3/2)$$

et la densité de la loi Gamma(3/2) est $2\sqrt{x}e^{-x}/\sqrt{\pi}$ sur $[0, \infty)$.



Un graphe aléatoire à 155 sommets qui exclut le nœud papillon (génération Boltzmann).

Idée de la preuve

Définition

Le (2)-noyau d'un graphe est le sous-graphe maximal (possiblement vide) de degré minimum ≥ 2 .

Idée de la preuve

Définition

Le (2)-noyau d'un graphe est le sous-graphe maximal (possiblement vide) de degré minimum ≥ 2 .

On obtient

$$C(z) = \text{Noyaux}(T(z)) + U(z)$$

avec

- ▶ $T(z)$ - série génératrice des arbres enracinés, définie par $T(z) = ze^{T(z)}$
- ▶ $U(z)$ - série génératrice des arbres non-enracinés.

Idée de la preuve

Définition

Le (2)-noyau d'un graphe est le sous-graphe maximal (possiblement vide) de degré minimum ≥ 2 .

On obtient

$$C(z) = \text{Noyaux}(T(z)) + U(z)$$

avec

- ▶ $T(z)$ - série génératrice des arbres enracinés, définie par $T(z) = ze^{T(z)}$
- ▶ $U(z)$ - série génératrice des arbres non-enracinés.

1. Déterminer les noyaux qui excluent nœud papillon.

Idée de la preuve

Définition

Le (2)-noyau d'un graphe est le sous-graphe maximal (possiblement vide) de degré minimum ≥ 2 .

On obtient

$$C(z) = \text{Noyaux}(T(z)) + U(z)$$

avec

- ▶ $T(z)$ - série génératrice des arbres enracinés, définie par $T(z) = ze^{T(z)}$
 - ▶ $U(z)$ - série génératrice des arbres non-enracinés.
1. Déterminer les noyaux qui excluent nœud papillon.
 2. Obtenir la série génératrice (Méthode symbolique).

Idée de la preuve

Définition

Le (2)-noyau d'un graphe est le sous-graphe maximal (possiblement vide) de degré minimum ≥ 2 .

On obtient

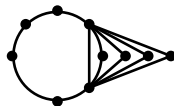
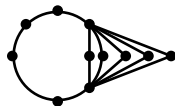
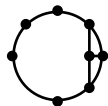
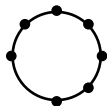
$$C(z) = \text{Noyaux}(T(z)) + U(z)$$

avec

- ▶ $T(z)$ - série génératrice des arbres enracinés, définie par $T(z) = ze^{T(z)}$
 - ▶ $U(z)$ - série génératrice des arbres non-enracinés.
1. Déterminer les noyaux qui excluent nœud papillon.
 2. Obtenir la série génératrice (Méthode symbolique).
 3. Analyser la série génératrice (Méthode du col).

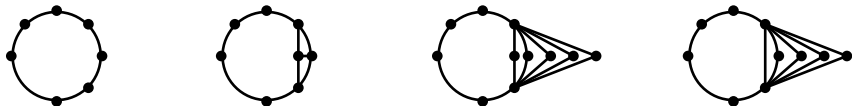
Noyaux qui excluent le nœud papillon

Les noyaux possibles sont les suivants



Noyaux qui excluent le nœud papillon

Les noyaux possibles sont les suivants



Proposition

Soit $T(z) = ze^{T(z)}$ la série génératrice des arbres enracinés.

La série génératrice des graphes connexes dans \mathcal{A} est

$$C(z) = \frac{T^2(1 - T + T^2)e^T}{1 - T} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{1 - T} \right) - \frac{T(-12 + 54T - 18T^2 + 5T^3 + T^4)}{1 - T}.$$

Séries Hayman-admissibles

Théorème (Hayman 1950)

On suppose que $A(z) = e^{C(z)}$ a un rayon de convergence $0 < \rho < \infty$ et qu' $A(z)$ est strictement positive sur un sous-intervalle de (R, ρ) . Si certaines conditions sont satisfait, la méthode du col s'applique

$$[z^n]A(z) \sim \frac{A(\zeta_n)}{\zeta_n \sqrt{2\pi(\zeta_n^2 C''(\zeta_n) + \zeta_n C'(\zeta_n))}}$$

avec ζ_n défini comme la solution unique de $\zeta_n C'(\zeta_n) = n$ dans $(0, \rho)$.

La classe des fonctions qui sont Hayman admissibles est fermée par multiplication, addition, exponentiation.

Hayman et les composantes

Théorème (Cas spécial de Drmota et al. 2010)

Soit $C(z)$ une série à coefficients positifs et de rayon ρ . On suppose que $A(z) = e^{C(z)}$ est Hayman-admissible. Si $A(z) = e^{C(z)}$ satisfait certaines conditions supplémentaires quand $r \rightarrow \rho$, on obtient

$$\frac{\kappa(R_n) - \mathbb{E}(\kappa(R_n))}{\sqrt{\mathbb{V}(\kappa(R_n))}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

avec ¹

$$\mathbb{E}(\kappa(R_n)) \sim C(\zeta_n) \text{ et } \mathbb{V}(\kappa(R_n)) \sim V(\zeta_n)$$

et et $V(r) = C(r) - \frac{(rC'(r))^2}{rC'(r) + r^2C''(r)}$.

¹ ζ_n est défini comme la solution unique de $\zeta_n C'(\zeta_n) = n$ dans $(0, \rho)$.

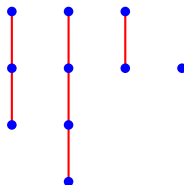
Forêts de chemins et de chenilles



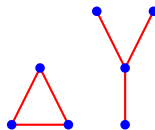
Singularité dominante de $C(z)$: $\frac{1}{1-z/\rho}$

Forêts de chemins

Soit \mathcal{A} la classe de graphes où toutes les composantes sont des chemins.



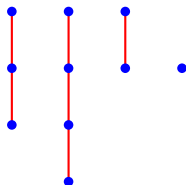
Une forêt de chemins à 10 sommets.



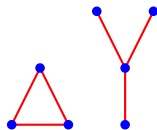
Mineurs exclus : K_3 et S_3 .

Forêts de chemins

Soit \mathcal{A} la classe de graphes où toutes les composantes sont des chemins.



Une forêt de chemins à 10 sommets.



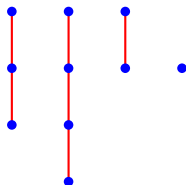
Mineurs exclus : K_3 et S_3 .

La série génératrice des chemins est

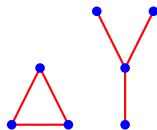
$$C(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2} z \Rightarrow A(z) = e^{C(z)}.$$

Forêts de chemins

Soit \mathcal{A} la classe de graphes où toutes les composantes sont des chemins.



Une forêt de chemins à 10 sommets.



Mineurs exclus : K_3 et S_3 .

La série génératrice des chemins est

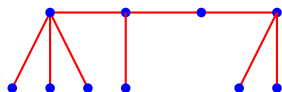
$$C(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2} z \Rightarrow A(z) = e^{C(z)}.$$

Observation : $C(z)$ a un **pôle simple**.

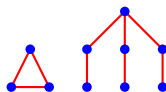
Forêts de chenilles

Définition

Une chenille est un arbre composé d'un chemin qui s'appelle l'échine, et de feuilles connectées à l'échine.



Une chenille.

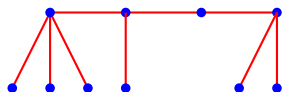


Mineurs exclus : K_3 et un arbre spécial.

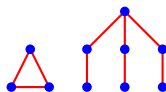
Forêts de chenilles

Définition

Une chenille est un arbre composé d'un chemin qui s'appelle l'échine, et de feuilles connectées à l'échine.



Une chenille.



Mineurs exclus : K_3 et un arbre spécial.

Lemme

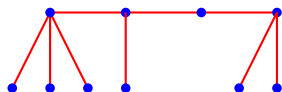
La série génératrice des chenilles est

$$C(z) = \frac{1}{2}z^2 \cdot (e^z - 1)^2 \frac{1}{1 - ze^z} + ze^z - \frac{z}{2} \Rightarrow A(z) = e^{C(z)}.$$

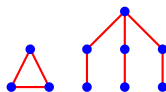
Forêts de chenilles

Définition

Une chenille est un arbre composé d'un chemin qui s'appelle l'échine, et de feuilles connectées à l'échine.



Une chenille.



Mineurs exclus : K_3 et un arbre spécial.

Lemme

La série génératrice des chenilles est

$$C(z) = \frac{1}{2}z^2 \cdot (e^z - 1)^2 \frac{1}{1 - ze^z} + ze^z - \frac{z}{2} \Rightarrow A(z) = e^{C(z)}.$$

Observation : $C(z)$ a un **pôle simple** .

Forêts de chemins et de chenilles

Proposition

Soit $\mathcal{A} = SET(\mathcal{C})$ une classe de graphes telle que

$C(z) = \frac{\alpha}{1-z/\rho} + D(z)$ et le rayon de $D(z)$ est plus grand que celui de $A(z)$.

Forêts de chemins et de chenilles

Proposition

Soit $\mathcal{A} = SET(\mathcal{C})$ une classe de graphes telle que

$C(z) = \frac{\alpha}{1-z/\rho} + D(z)$ et le rayon de $D(z)$ est plus grand que celui de $A(z)$. Pour $n \rightarrow \infty$ on a



$$A_n \sim \frac{e^{\alpha/2+D(\rho)}}{2\sqrt{\pi}n^{3/4}} \rho^{-n} e^{2\sqrt{n}} n!$$

Forêts de chemins et de chenilles

Proposition

Soit $\mathcal{A} = SET(\mathcal{C})$ une classe de graphes telle que

$C(z) = \frac{\alpha}{1-z/\rho} + D(z)$ et le rayon de $D(z)$ est plus grand que celui de $A(z)$. Pour $n \rightarrow \infty$ on a



$$A_n \sim \frac{e^{\alpha/2+D(\rho)}}{2\sqrt{\pi}n^{3/4}} \rho^{-n} e^{2\sqrt{n}} n!$$



$$\frac{\kappa(R_n) - \alpha\sqrt{n}}{(\alpha n/4)^{1/4}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Forêts de chemins et de chenilles

Proposition

Soit $\mathcal{A} = SET(\mathcal{C})$ une classe de graphes telle que

$C(z) = \frac{\alpha}{1-z/\rho} + D(z)$ et le rayon de $D(z)$ est plus grand que celui de $A(z)$. Pour $n \rightarrow \infty$ on a



$$A_n \sim \frac{e^{\alpha/2+D(\rho)}}{2\sqrt{\pi}n^{3/4}} \rho^{-n} e^{2\sqrt{n}} n!$$



$$\frac{\kappa(R_n) - \alpha\sqrt{n}}{(\alpha n/4)^{1/4}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- ▶ $S_n/\sqrt{n/\alpha}$ converge vers une *loi Gamma(2)* de densité xe^{-x} sur $[0, \infty]$.

La plus grande composante dans les forêts de chemins

Proposition (forêts de chemins)

Soit \mathcal{A} la classe des forêts de chemins. Dans ce cas L_n converge en loi vers une *distribution de Gumbel* : pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \rightarrow \infty$ on obtient

$$\mathbb{P} \left(\frac{L_n - \sqrt{n/2} \log n}{\sqrt{n/2}} < x \right) \rightarrow \exp \left(-\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2}} \right).$$

Problèmes ouverts

LA CONSTANCE DE CROISSANCE (ÉTIQUETÉS/NON-ÉTIQUETÉS)

Problèmes ouverts

LA CONSTANCE DE CROISSANCE (ÉTIQUETÉS/NON-ÉTIQUETÉS)

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$ existe pour toutes les classes fermées par mineurs

Problèmes ouverts

LA CONSTANCE DE CROISSANCE (ÉTIQUETÉS/NON-ÉTIQUETÉS)

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ existe pour toutes les classes fermées par mineurs
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n A_{n-1}}{A_n}$ existe pour toutes les classes fermées par mineurs

Problèmes ouverts

LA CONSTANCE DE CROISSANCE (ÉTIQUETÉS/NON-ÉTIQUETÉS)

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ existe pour toutes les classes fermées par mineurs
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n A_{n-1}}{A_n}$ existe pour toutes les classes fermées par mineurs

SÉRIES GÉNÉRATRICES

- ▶ Liens entre la singularité dominante et la nature des mineurs exclus?

Problèmes ouverts


LA CONSTANCE DE CROISSANCE (ÉTIQUETÉS/NON-ÉTIQUETÉS)

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ existe pour toutes les classes fermées par mineurs
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n A_{n-1}}{A_n}$ existe pour toutes les classes fermées par mineurs

SÉRIES GÉNÉRATRICES

- ▶ Liens entre la singularité dominante et la nature des mineurs exclus?
- ▶ Classification complète des classes fermées par mineurs?

Vue globale des résultats ²

Mineurs exclus	2-conn. ou 	\diamond et \boxtimes	\boxtimes	\wedge ou \triangle et \vee	tous les graphes conn. à $k + 1$ sommets
$C(\rho)$	$< \infty$	$\log \frac{1}{1-z/\rho}$	$\frac{1}{\sqrt{1-z/\rho}}$	$\frac{1}{1-z/\rho}$	entière
$\mathbb{P}(\text{conn.})$	$\rightarrow p > 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\kappa(R_n)$	$O(1)$ Poisson	$\log n$ gaussien	$n^{1/3}$ gaussien	$n^{1/2}$ gaussien	n/k gaussien
S_n	$n - F_n$ $F_n \rightarrow \text{discr.}$	n $\frac{1}{4}(1-x)^{-3/4}$	$n^{2/3}$ $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}e^{-x}$	$n^{1/2}$ xe^{-x}	k Dirac
L_n	$n - F_n$ $F_n \rightarrow \text{discr.}$	n PD ^[1]	?	$n^{1/2} \log n$ Gumbel	k Dirac