

La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one

La hauteur de l'arbre de Lyndon via l'étude d'un arbre de Yule

Philippe CHASSAING et Lucas MERCIER

Institut Élie Cartan
Université de Lorraine

Alea 2013
18 mars 2013

La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur

Many to one

► Alphabet : $\{0, 1\}$.

- ▶ Alphabet : $\{0, 1\}$.
- ▶ Mots : $w = w_1 w_2 \dots w_n$.

- ▶ Alphabet : $\{0, 1\}$.
- ▶ Mots : $w = w_1 w_2 \dots w_n$.
- ▶ Ordre lexicographique : $w \leq w'$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
 - ▶ Il existe un mot u tel que $w' = wu$.
 - ▶ Il existe des mots u, v et v' tels que $w = u0v$ et $w' = u1v'$.

- ▶ Alphabet : $\{0, 1\}$.
- ▶ Mots : $w = w_1 w_2 \dots w_n$.
- ▶ Ordre lexicographique : $w \leq w'$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
 - ▶ Il existe un mot u tel que $w' = wu$.
 - ▶ Il existe des mots u, v et v' tels que $w = u0v$ et $w' = u1v'$.
- ▶ Mot de Lyndon : w est un mot de Lyndon si pour tous mots u et v tels que $w = uv, w \leq v$.

- ▶ Alphabet : $\{0, 1\}$.
- ▶ Mots : $w = w_1 w_2 \dots w_n$.
- ▶ Ordre lexicographique : $w \leq w'$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
 - ▶ Il existe un mot u tel que $w' = wu$.
 - ▶ Il existe des mots u, v et v' tels que $w = u0v$ et $w' = u1v'$.
- ▶ Mot de Lyndon : w est un mot de Lyndon si pour tous mots u et v tels que $w = uv$, $w \leq v$.
- ▶ Facteur droit standard : le plus petit suffixe propre d'un mot de Lyndon w .

- ▶ Alphabet : $\{0, 1\}$.
- ▶ Mots : $w = w_1 w_2 \dots w_n$.
- ▶ Ordre lexicographique : $w \leq w'$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
 - ▶ Il existe un mot u tel que $w' = wu$.
 - ▶ Il existe des mots u, v et v' tels que $w = u0v$ et $w' = u1v'$.
- ▶ Mot de Lyndon : w est un mot de Lyndon si pour tous mots u et v tels que $w = uv$, $w \leq v$.
- ▶ Facteur droit standard : le plus petit suffixe propre d'un mot de Lyndon w .
- ▶ Factorisation standard : la décomposition d'un mot de Lyndon w en uv avec v le facteur droit standard. Dans ce cas, u et v sont des mots de Lyndon.

La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Arbre de Lyndon

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

On itère la factorisation standard.

00010101001001011101001

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

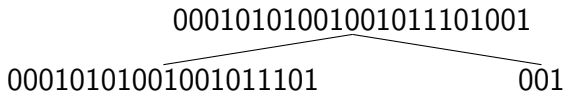
Hauteur

Many to one

Arbre de Lyndon

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

On itère la factorisation standard.



Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

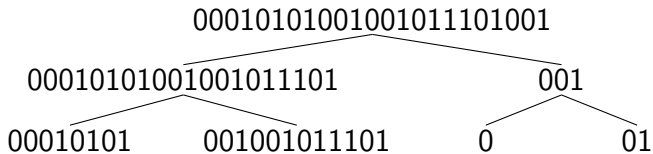
Hauteur

Many to one

Arbre de Lyndon

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

On itère la factorisation standard.



Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

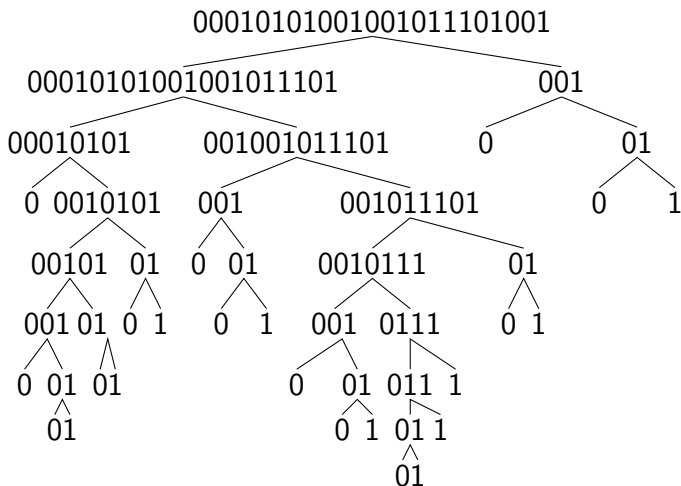
Hauteur

Many to one

Arbre de Lyndon

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

On itère la factorisation standard.



Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur

Many to one

Décomposition de la hauteur

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

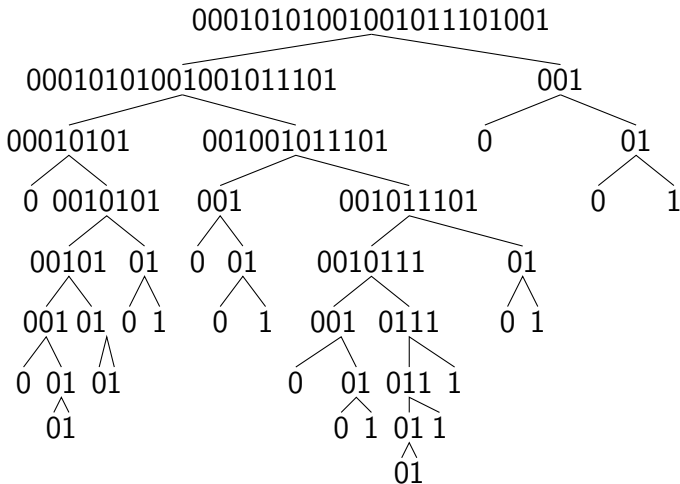
Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur

Many to one



Décomposition de la hauteur

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

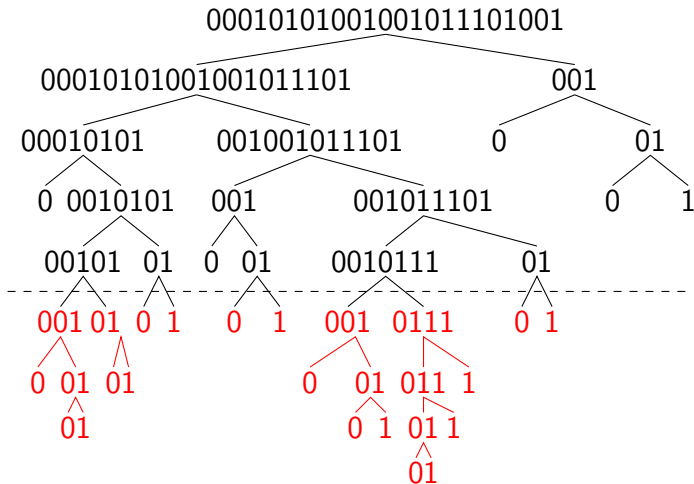
Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur

Many to one



Décomposition de la hauteur

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

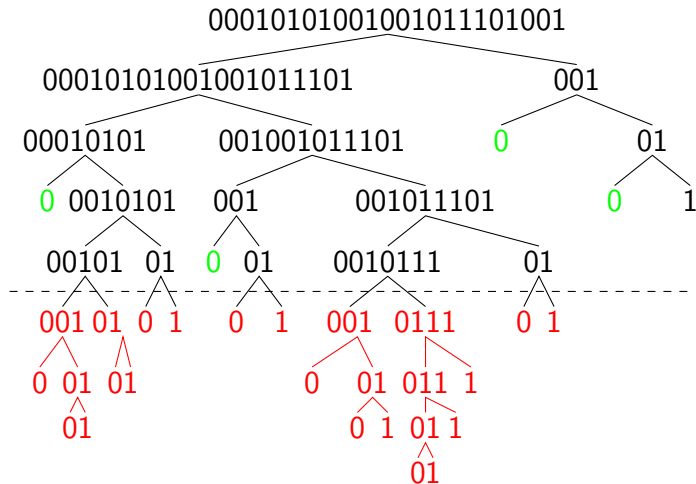
Mot de Lyndon

Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur

Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Arbre de Yule Y_t

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Arbre de Yule Y_t

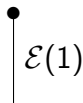
Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Arbre de Yule Y_t

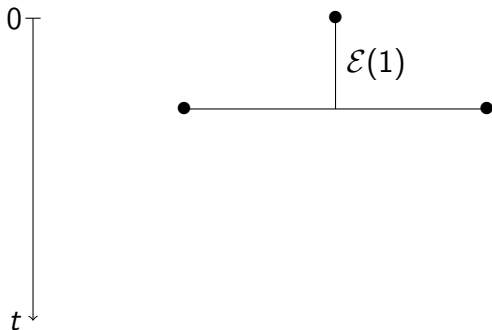
Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Arbre de Yule Y_t

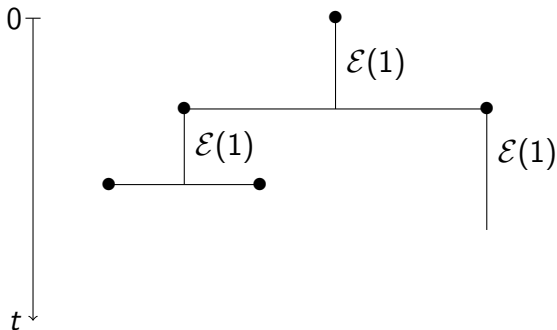
Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Arbre de Yule Y_t

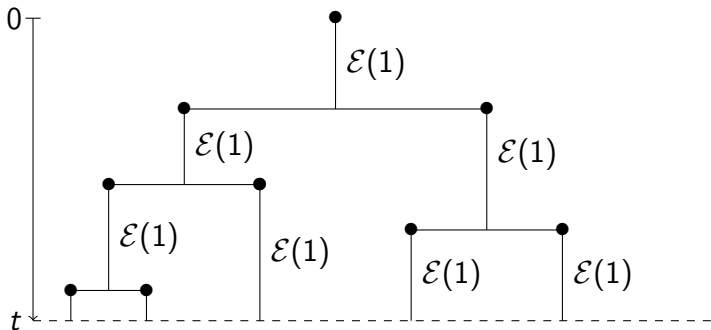
Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule

La hauteur de l'arbre de Lyndon via l'étude d'un arbre de Yule

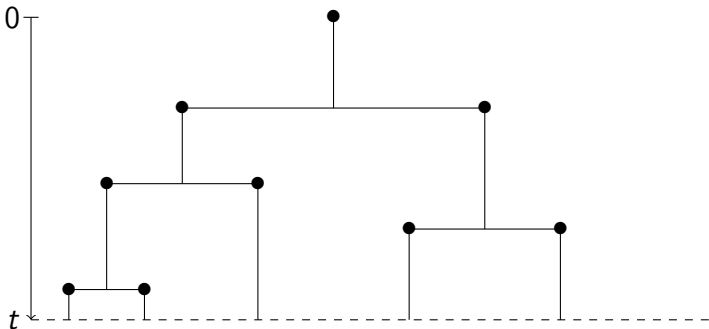
Philippe CHASSAING et Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

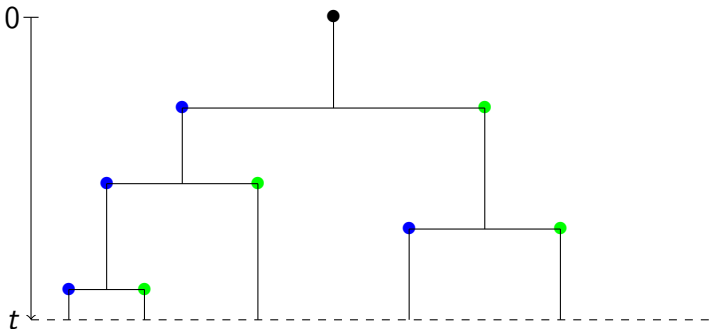
Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

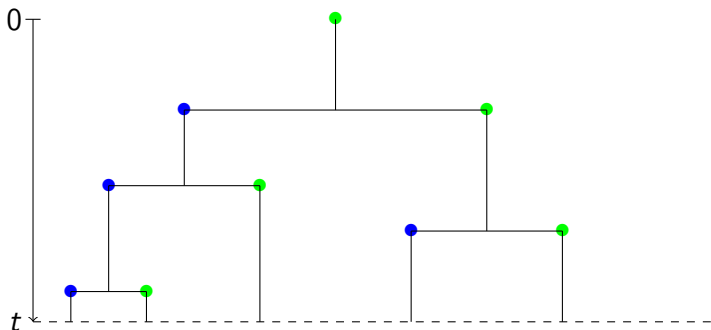
Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one

Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

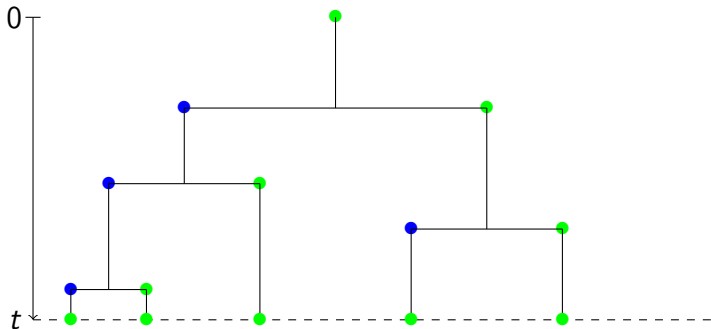
Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

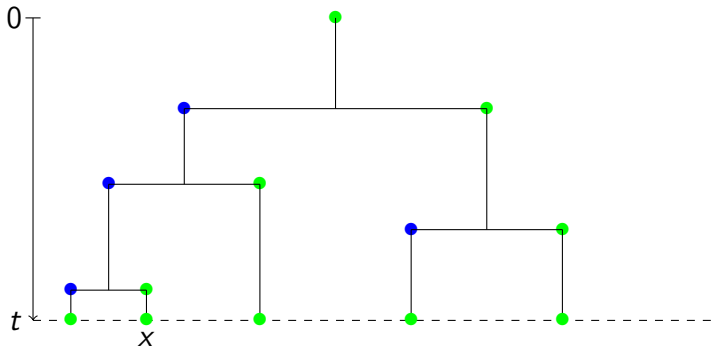
Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one

Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

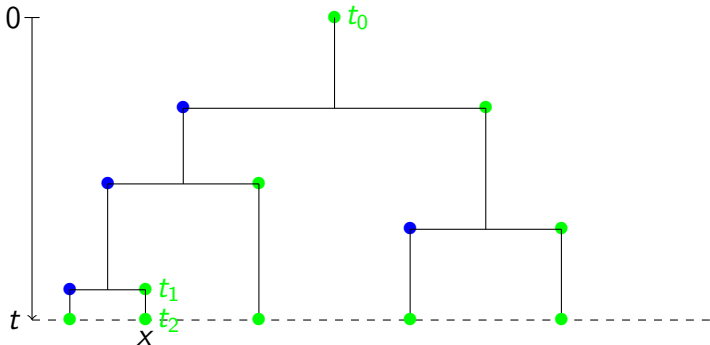
Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

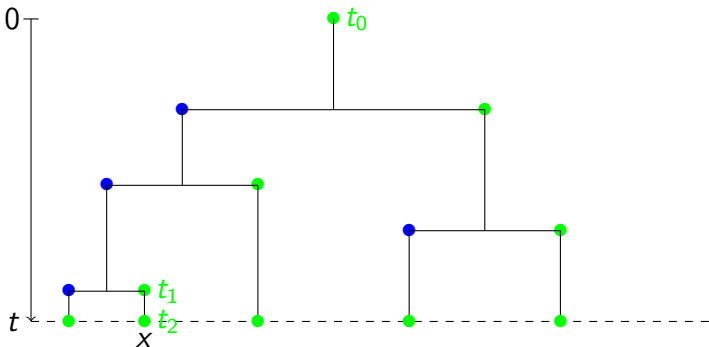
Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

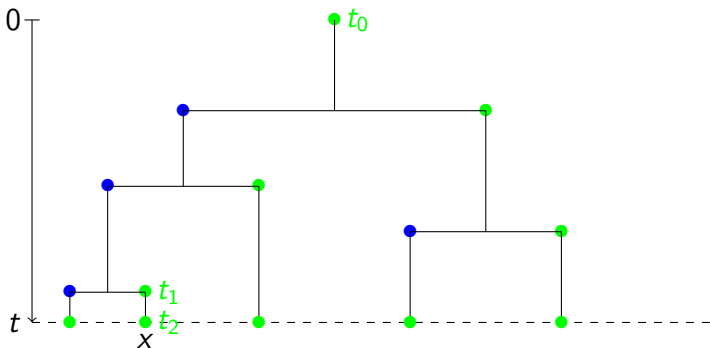
Hauteur
Many to one

Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule



$$h_x = \left\{ \begin{array}{l} \text{La hauteur de } x \text{ dans } Y_t \\ + \sum (t_i - t_{i-1}) \\ + \text{Geom}(\frac{1}{2}) \end{array} \right.$$

Lire la hauteur de l'arbre de Lyndon sur l'arbre de Yule



$$h_x = \left\{ \begin{array}{l} \# \bullet + \# \bullet \text{ entre la racine et } x \\ + \sum (t_i - t_{i-1}) \\ + \text{Geom}(\frac{1}{2}) \end{array} \right.$$

On cherche $\sup_{x \in Y_t} h_x$.

$A_{m,n,p}$: l'ensemble de feuilles de Y_t ayant m ●, n ● et
 $p = \sum t_i - t_{i-1}$.

On cherche $\sup_{x \in Y_t} h_x$.

$A_{m,n,p}$: l'ensemble de feuilles de Y_t ayant m ●, n ● et
 $p = \sum t_i - t_{i-1}$.

Le maximum de k géométriques indépendantes vaut
environ $\log_2(k)$.

$$\sup_{x \in A_{m,n,p}} h_x \simeq m + n + p + \log_2(|A_{m,n,p}|).$$

On cherche $\sup_{x \in Y_t} h_x$.

$A_{m,n,p}$: l'ensemble de feuilles de Y_t ayant m ●, n ● et
 $p = \sum t_i - t_{i-1}$.

Le maximum de k géométriques indépendantes vaut
environ $\log_2(k)$.

$$\sup_{x \in A_{m,n,p}} h_x \simeq m + n + p + \log_2(|A_{m,n,p}|).$$

\vec{x} une direction infinie aléatoire uniforme dans l'arbre
binaire complet.

La hauteur de l'arbre de Lyndon via l'étude d'un arbre de Yule

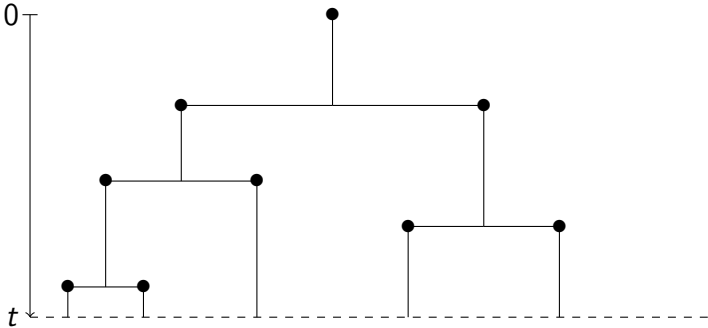
Philippe CHASSAING et Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de l'arbre de Lyndon via l'étude d'un arbre de Yule

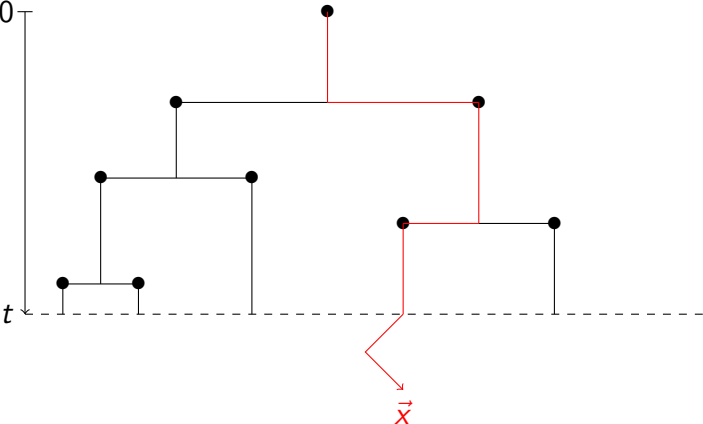
Philippe CHASSAING et Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de l'arbre de Lyndon via l'étude d'un arbre de Yule

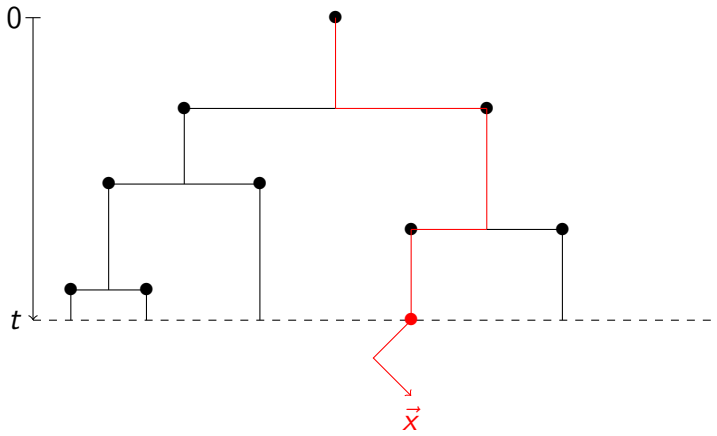
Philippe CHASSAING et Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

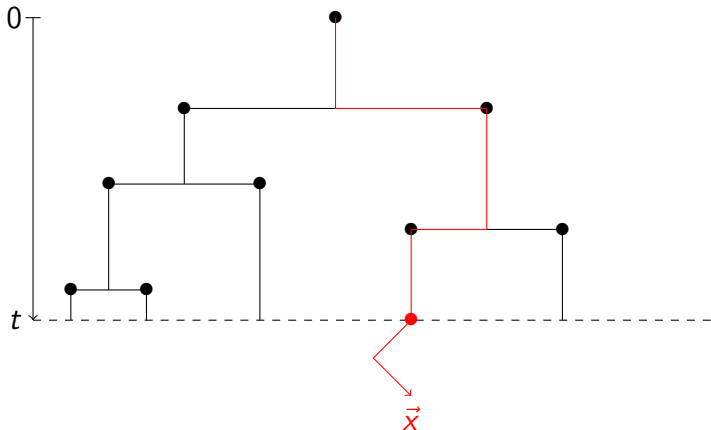
Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



$\pi_{m,n,p}$: probabilité d'avoir un sommet de type m, n, p
dans la direction \vec{x} .

La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

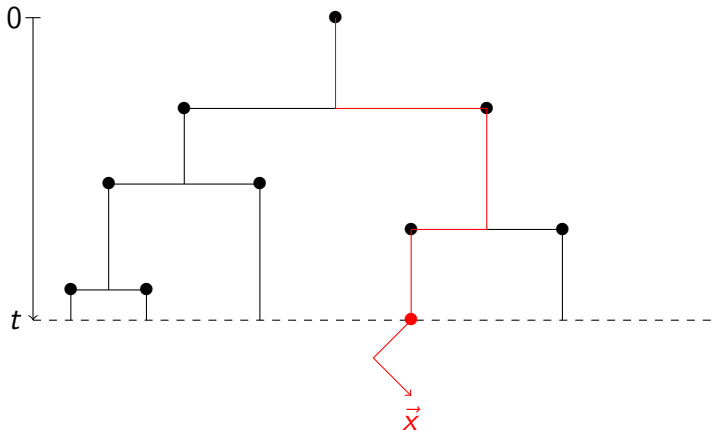
Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one



$\pi_{m,n,p}$: probabilité d'avoir un sommet de type m, n, p
dans la direction \vec{x} .

$$\pi_{m,n,p} = 2^{-m-n} \mathbb{E}(A_{m,n,p})$$

La hauteur de
l'arbre de Lyndon
via l'étude d'un
arbre de Yule

Philippe
CHASSAING et
Lucas MERCIER

Arbre de Lyndon

Mot de Lyndon
Décomposition de la
hauteur

Arbre de Yule

Hauteur
Many to one

μ_{\bullet} : ensemble des \bullet le long de x .

μ_{\circ} : ensemble des \circ le long de x .

μ_{\bullet} : ensemble des \bullet le long de x .

μ_{\bullet} : ensemble des \bullet le long de x .

La loi de μ_{\bullet} est un processus de Poisson ponctuel
d'intensité $\frac{1}{2}$.

La loi de μ_{\bullet} est un processus de Poisson ponctuel
d'intensité $\frac{1}{2}$.

μ_{\bullet} : ensemble des \bullet le long de x .

μ_{\bullet} : ensemble des \bullet le long de x .

La loi de μ_{\bullet} est un processus de Poisson ponctuel
d'intensité $\frac{1}{2}$.

La loi de μ_{\bullet} est un processus de Poisson ponctuel
d'intensité $\frac{1}{2}$.

μ_{\bullet} et μ_{\bullet} sont indépendants

μ_{\bullet} : ensemble des \bullet le long de x .

μ_{\bullet} : ensemble des \bullet le long de x .

La loi de μ_{\bullet} est un processus de Poisson ponctuel
d'intensité $\frac{1}{2}$.

La loi de μ_{\bullet} est un processus de Poisson ponctuel
d'intensité $\frac{1}{2}$.

μ_{\bullet} et μ_{\bullet} sont indépendants

Merci de votre attention.