

Génération aléatoire de permutations suivant leur ensemble de descente

Philippe Marchal

CNRS et Université Paris 13

Génération aléatoire

σ permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ensemble de descente : $D(\sigma) = \{i \in [1, n - 1], \sigma(i) > \sigma(i + 1)\}$.

But : génération aléatoire uniforme d'une permutation ayant un ensemble de descente donné.

Génération aléatoire

σ permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ensemble de descente : $D(\sigma) = \{i \in [1, n-1], \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$.

But : génération aléatoire uniforme d'une permutation ayant une ensemble de descente donné.

Exemple : permutation alternante : $D(\sigma) = [1, n-1] \cap 2\mathbb{N}$

Nombre de permutations alternantes de longueur n

$$\sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} n!$$

→ La méthode de rejet (on tire une permutation au hasard et on la rejette si son ensemble de descente n'est pas le bon) a une complexité exponentielle.

Énumération

Pour n et $A \subset [1, n - 1]$ fixés, le nombre de permutations d'ensemble de descente A est donné par :

$$\sum_{B=\{i_1 < i_2 \dots < i_k\} \subset A^c} (-1)^{|A^c| - |B|} \binom{N}{N - i_k, i_k - i_{k-1}, \dots, i_2 - i_1, i_1}$$

Pour n et $A \subset [1, n-1]$ fixés, le nombre de permutations d'ensemble de descente A est donné par :

$$\sum_{B=\{i_1 < i_2 \dots < i_k\} \subset A^c} (-1)^{|A^c| - |B|} \binom{N}{N - i_k, i_k - i_{k-1}, \dots, i_2 - i_1, i_1}$$

Si on impose un motif périodique, on peut chercher des séries génératrices.

Exemple : A_n nombre de permutations alternantes de longueur n .

$$\sum_n \frac{A_n}{n!} t^n = \frac{1}{\cos x} + \tan x$$

(André, XIXe siècle). Autres travaux : Carlitz, Remmel
Série génératrice non holonome \rightarrow pas de méthode générique.

Idée : construire une suite aléatoire de réels $Y_i, 1 \leq i \leq n$, ayant le profil de descente donné. En déduire une permutation par un algorithme de tri.

Idée : construire une suite aléatoire de réels $Y_i, 1 \leq i \leq n$, ayant le profil de descente donné. En déduire une permutation par un algorithme de tri.

Rappel : f est la densité d'une variable aléatoire réelle X si

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

On doit avoir $f \geq 0$ et $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

L'algorithme général

- $f_N = 1$
- Si $i \in A$,

$$f_i(x) = \int_0^x f_{i+1}(y) dy$$

- Si $i \notin A$,

$$f_i(x) = \int_x^1 f_{i+1}(y) dy$$

complexité des précalculs : $O(n^2)$

L'algorithme général

- $f_N = 1$
- Si $i \in A$,

$$f_i(x) = \int_0^x f_{i+1}(y) dy$$

- Si $i \notin A$,

$$f_i(x) = \int_x^1 f_{i+1}(y) dy$$

complexité des précalculs : $O(n^2)$

- Y_1 de densité $f_1 / \int_0^1 f_1(x) dx$.
- Si $i \in A$, Y_{i+1} de densité $\mathbf{1}_{[0, Y_i]} f_{i+1} / f_i(Y_i)$.
- Si $i \notin A$, Y_{i+1} de densité $\mathbf{1}_{[Y_i, 1]} f_{i+1} / f_i(Y_i)$.

complexité de la simulation : $O(n)$ mais avec des calculs réels. Puis tri en temps $n \log n$.

Génération des permutations alternantes

U_1, U_2, \dots, U_N variables aléatoires iid, uniformes sur $[0, 1]$.

$$X_1 = U_1$$

$$X_{n+1} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(U_{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2} X_n\right) \right) \geq 1 - X_n$$

Génération des permutations alternantes

U_1, U_2, \dots, U_N variables aléatoires iid, uniformes sur $[0, 1]$.

$$X_1 = U_1$$

$$X_{n+1} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(U_{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2} X_n\right) \right) \geq 1 - X_n$$

Rejet : on pose $\alpha_N = \sin(\frac{\pi}{2} X_N) / \sin(\frac{\pi}{2} X_1)$.

Avec probabilité $1/(\alpha_N + \alpha_N^{-1})$,

$$Y = (X_1, 1 - X_2, X_3, 1 - X_4 \dots)$$

Avec probabilité $1/(\alpha_N + \alpha_N^{-1})$,

$$Y = (X_N, 1 - X_{N-1}, X_{N-2}, 1 - X_{N-3} \dots)$$

Avec probabilité $1 - 2/(\alpha_N + \alpha_N^{-1}) \leq 1 - (2/3\pi)$, rejet.

Énumération dans le cas de période p

On définit les f_n par récurrence croissante.

$$\sum_n \frac{A_n}{n!} y^n = \int_0^1 F(x, y) dx$$

A_n : nombre de permutations de longueur n ayant l'ensemble de descente souhaité. $F(x, y) = \sum_n y^n f_n(x)$.

Énumération dans le cas de période p

On définit les f_n par récurrence croissante.

$$\sum_n \frac{A_n}{n!} y^n = \int_0^1 F(x, y) dx$$

A_n : nombre de permutations de longueur n ayant l'ensemble de descente souhaité. $F(x, y) = \sum_n y^n f_n(x)$.

Suivant que n est une descente ou une montée, on a $f'_{n+1} = \pm f_n$ et $f_n(0) = 0$ ou $f_n(1) = 0$.

→ On obtient F par un système linéaire de taille kp où k est le nombre de montées. La solution est une fraction rationnelle en les $\exp(\omega_i y)$, où les ω_i sont racines n -ièmes de 1 ou -1 suivant la parité de k .