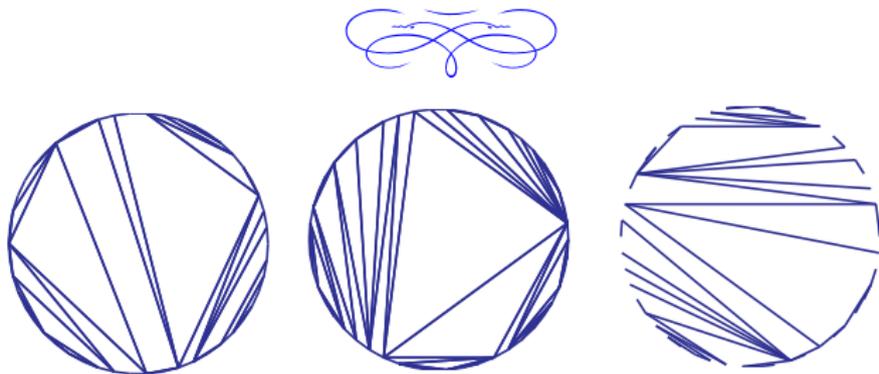


*Configurations non croisées aléatoires*  
*et arbres simplement générés*



Igor Kortchemski (travail avec Nicolas Curien)

DMA – École Normale Supérieure

Journées ALÉA – CIRM – Mars 2013

# Philosophie générale

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

# Philosophie générale

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

$\curvearrowright$  *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

# Philosophie générale

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- ↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- ↪ *Du continu au discret* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par  $X$  et passe à la limite,  $X_n$  vérifie « à peu près »  $\mathcal{P}$  pour  $n$  grand.

# Philosophie générale

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- ↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- ↪ *Du continu au discret* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par  $X$  et passe à la limite,  $X_n$  vérifie « à peu près »  $\mathcal{P}$  pour  $n$  grand.
- ↪ *Universalité* : si  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une autre suite d'objets qui converge vers  $X$ , alors  $X_n$  et  $Y_n$  ont à peu près les mêmes propriétés pour  $n$  grand.

# Philosophie générale

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu »  $X$  :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- ↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- ↪ *Du continu au discret* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par  $X$  et passe à la limite,  $X_n$  vérifie « à peu près »  $\mathcal{P}$  pour  $n$  grand.
- ↪ *Universalité* : si  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une autre suite d'objets qui converge vers  $X$ , alors  $X_n$  et  $Y_n$  ont à peu près les mêmes propriétés pour  $n$  grand.

Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont **aléatoires** ?  
 → **Convergence en distribution/loi**

# Plan

**I. DÉFINITION**

**II. THÉORÈME**

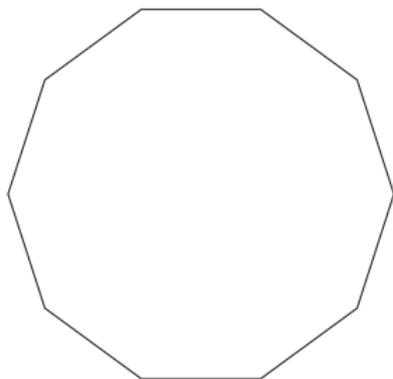
**III. PREUVE**

**IV. APPLICATION**

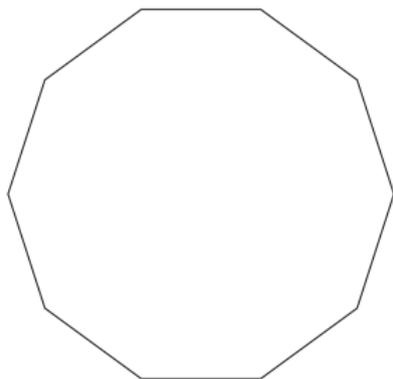
# I. PRÉSENTATION DES OBJETS DISCRETS



Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).

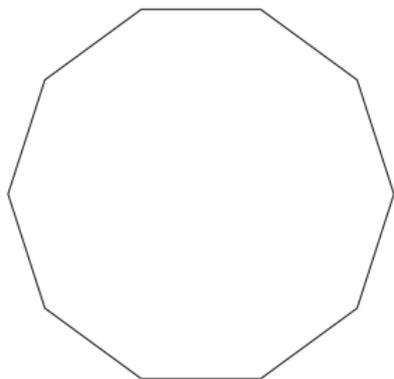


Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



*Philosophie générale:* on choisit au hasard une configuration **non-croisée** obtenue à partir des sommets de  $P_n$ , c'est-à-dire un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas.

Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



*Philosophie générale:* on choisit au hasard une configuration **non-croisée** obtenue à partir des sommets de  $P_n$ , c'est-à-dire un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas.

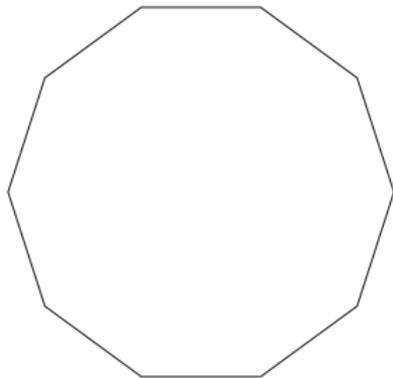
Que se passe-t-il pour  $n$  grand ?

## Cas des dissections de $P_n$



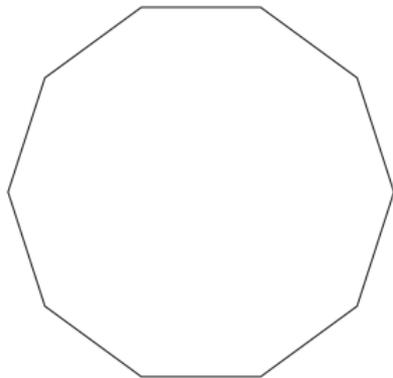
# Dissections

Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



# Dissections

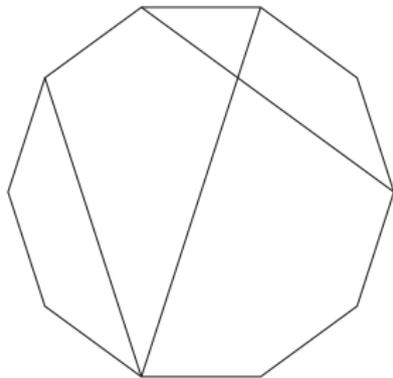
Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



Une **dissection** de  $P_n$  est l'union des côtés de  $P_n$  et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

# Dissections

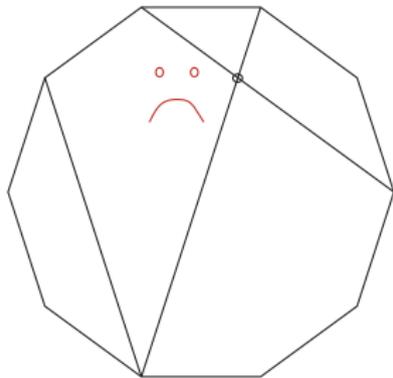
Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



Une **dissection** de  $P_n$  est l'union des côtés de  $P_n$  et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

# Dissections

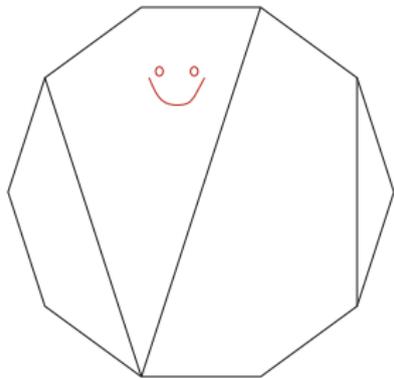
Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



Une **dissection** de  $P_n$  est l'union des côtés de  $P_n$  et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

# Dissections

Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



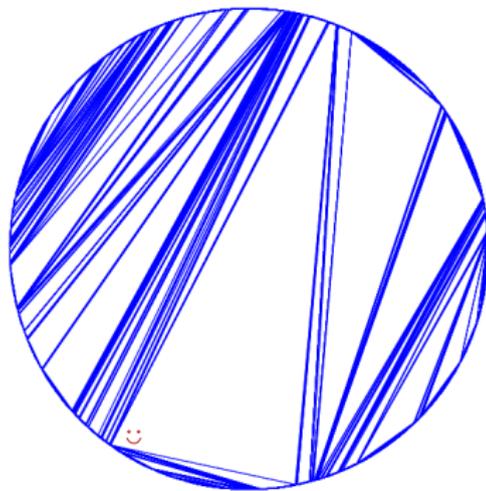
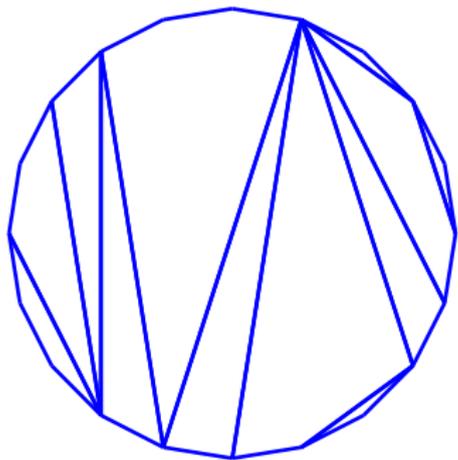
Une **dissection** de  $P_n$  est l'union des côtés de  $P_n$  et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

# Dissections

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire, **uniformément** distribuée parmi toutes les dissections de  $P_n$ . À quoi ressemble  $\mathcal{D}_n$  lorsque  $n$  est très grand ?

# Dissections

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire, **uniformément** distribuée parmi toutes les dissections de  $P_n$ . À quoi ressemble  $\mathcal{D}_n$  lorsque  $n$  est très grand ?



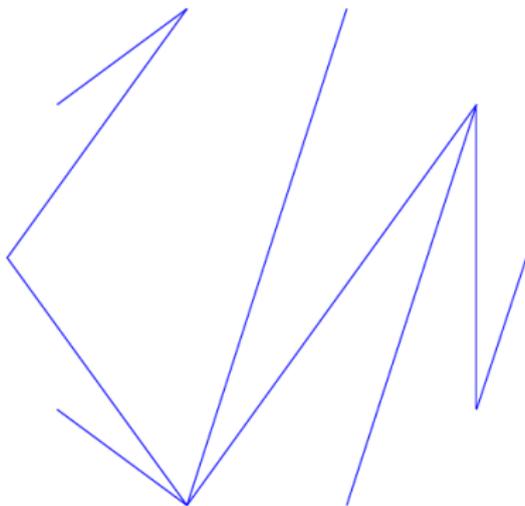
Exemple de réalisations de  $\mathcal{D}_{18}$  et  $\mathcal{D}_{15000}$ .

Cas des arbres **non croisés** de  $P_n$



# Arbres non croisés

Exemple d'arbre **non croisé** de  $P_{10}$  :

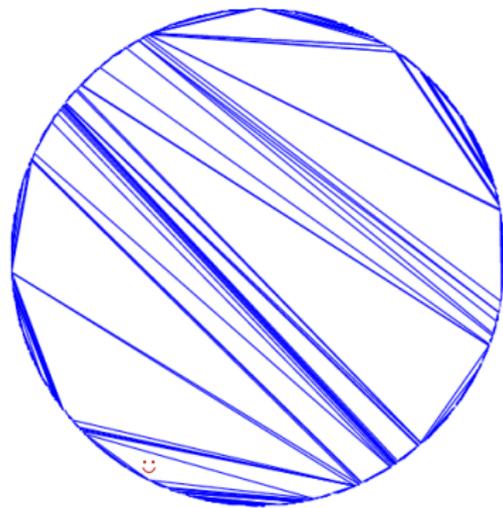
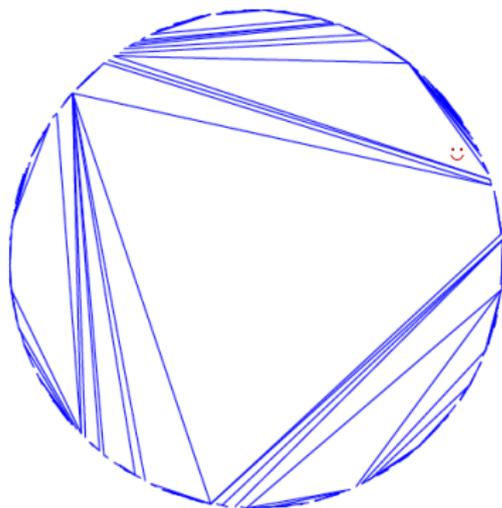


## *Arbres non croisés*

On choisit aléatoirement  $\mathcal{T}_n$  un arbre **non croisé**, **uniformément** parmi tous ceux de  $\mathcal{P}_n$ . À quoi ressemble  $\mathcal{T}_n$  pour  $n$  grand ?

# Arbres non croisés

On choisit aléatoirement  $\mathcal{T}_n$  un arbre **non croisé**, **uniformément** parmi tous ceux de  $\mathcal{P}_n$ . À quoi ressemble  $\mathcal{T}_n$  pour  $n$  grand ?



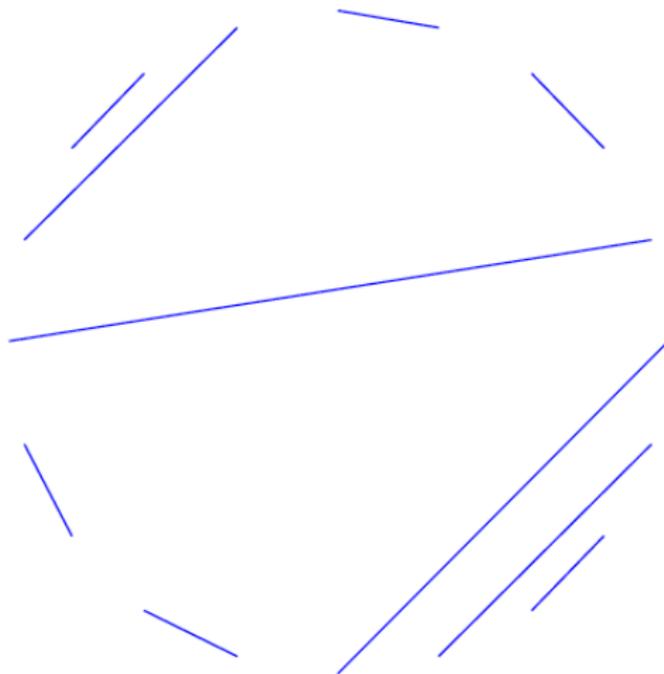
Exemple de réalisations de  $\mathcal{T}_{500}$  et  $\mathcal{T}_{1000}$ .

Cas des transpositions **non croisées** de  $P_{2n}$



# *Transpositions non croisées*

Exemple de transposition **non croisée** de  $P_{20}$  :

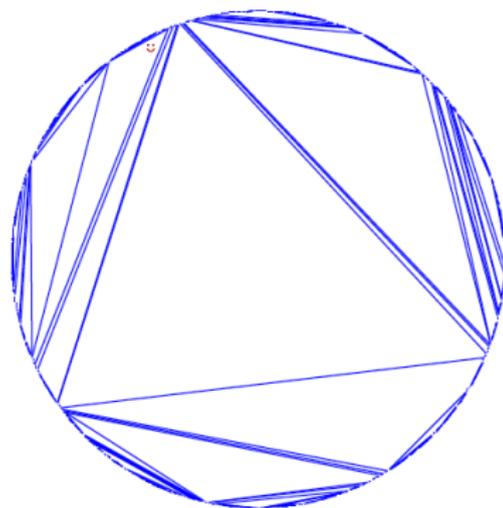
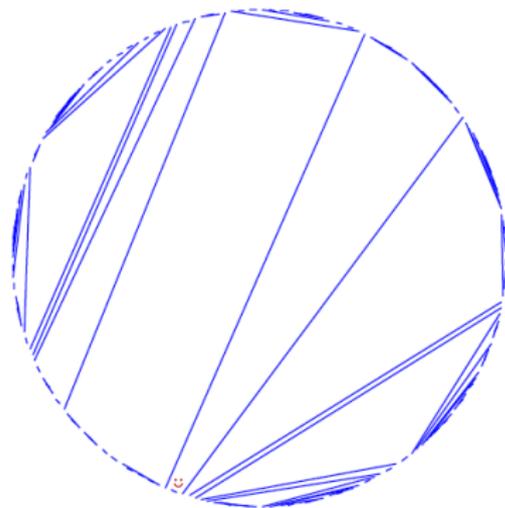


# *Transpositions non croisées*

On choisit aléatoirement  $\mathcal{Q}_n$  une transposition **non croisée** de  $P_{2n}$ ,  
**uniformément** parmi tous ceux de  $P_{2n}$ . À quoi ressemble  $\mathcal{Q}_n$  pour  $n$  grand ?

# Transpositions non croisées

On choisit aléatoirement  $\mathcal{Q}_n$  une transposition **non croisée** de  $P_{2n}$ ,  
**uniformément** parmi tous ceux de  $P_{2n}$ . À quoi ressemble  $\mathcal{Q}_n$  pour  $n$  grand ?



Exemple de réalisations de  $\mathcal{Q}_{250}$  et  $\mathcal{Q}_{1000}$ .

## *Petit historique*

### **Point de vue *combinatoire* :**

- ▶ Comptage et bijections d'**arbres non croisés** : Dulucq & Penaud (1993), Noy (1998), ...
- ▶ Comptage de diverses **configurations non croisées** : Flajolet & Noy (1999).

# Petit historique

## Point de vue **combinatoire** :

- ▶ Comptage et bijections d'**arbres non croisés** : Dulucq & Penaud (1993), Noy (1998), ...
- ▶ Comptage de diverses **configurations non croisées** : Flajolet & Noy (1999).

## Point de vue **combinatoire probabiliste** :

- ▶ **Triangulations** uniformes : Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger (**degré maximal**, **plus longue diagonale**, 1999) et Gao & Wormald (**degré maximal**, 2000),
- ▶ **Arbres non croisés** uniformes (**somme des longueurs**, **degré maximal**) : Deutsch & Noy (2002), Marckert & Panholzer (2002),
- ▶ **Dissections** uniformes : Bernasconi, Panagiotou & Steger (**degrés**, **degré maximal**, 2010) et Drmota, de Mier & Noy (**diamètre**, 2012).

# Petit historique

## Point de vue **combinatoire** :

- ▶ Comptage et bijections d'**arbres non croisés** : Dulucq & Penaud (1993), Noy (1998), ...
- ▶ Comptage de diverses **configurations non croisées** : Flajolet & Noy (1999).

## Point de vue **combinatoire probabiliste** :

- ▶ **Triangulations** uniformes : Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger (**degré maximal**, **plus longue diagonale**, 1999) et Gao & Wormald (**degré maximal**, 2000),
- ▶ **Arbres non croisés** uniformes (**somme des longueurs**, **degré maximal**) : Deutsch & Noy (2002), Marckert & Panholzer (2002),
- ▶ **Dissections** uniformes : Bernasconi, Panagiotou & Steger (**degrés**, **degré maximal**, 2010) et Drmota, de Mier & Noy (**diamètre**, 2012).

## Point de vue **géométrique** :

- ▶ Aldous (1994) : **triangulations** uniformes,
- ▶ K. (2011) : **dissections favorisant les grandes faces** (non uniformes).

# Petit historique

## Point de vue **combinatoire** :

- ▶ Comptage et bijections d'**arbres non croisés** : Dulucq & Penaud (1993), Noy (1998), ...
- ▶ Comptage de diverses **configurations non croisées** : Flajolet & Noy (1999).

## Point de vue **combinatoire probabiliste** :

- ▶ **Triangulations** uniformes : Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger (**degré maximal**, **plus longue diagonale**, 1999) et Gao & Wormald (**degré maximal**, 2000),
- ▶ **Arbres non croisés** uniformes (**somme des longueurs**, **degré maximal**) : Deutsch & Noy (2002), Marckert & Panholzer (2002),
- ▶ **Dissections** uniformes : Bernasconi, Panagiotou & Steger (**degrés**, **degré maximal**, 2010) et Drmota, de Mier & Noy (**diamètre**, 2012).

## Point de vue **géométrique** :

- ▶ Aldous (1994) : **triangulations** uniformes,
- ▶ K. (2011) : **dissections favorisant les grandes faces** (non uniformes).

## Point de vue **Gromov-Hausdorff** :

- ▶ K. & Curien (en cours) : lien avec la percolation sur des **triangulations** aléatoires.

## II. CONSTRUCTION DE L'OBJET LIMITE :

la **triangulation brownienne** (Aldous, '94)

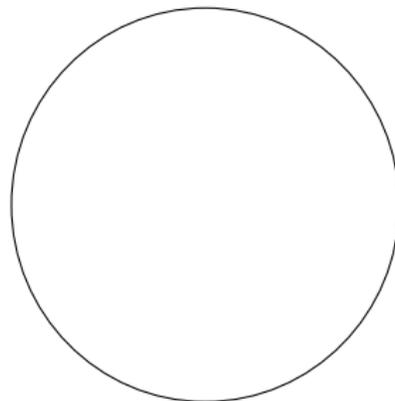
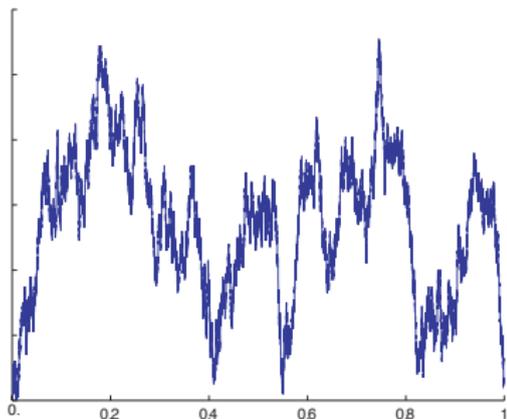


# *Construction de l'objet limite*

On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :

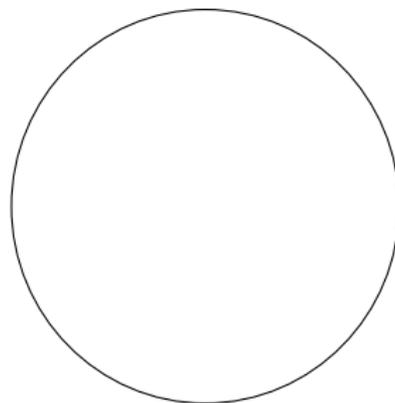
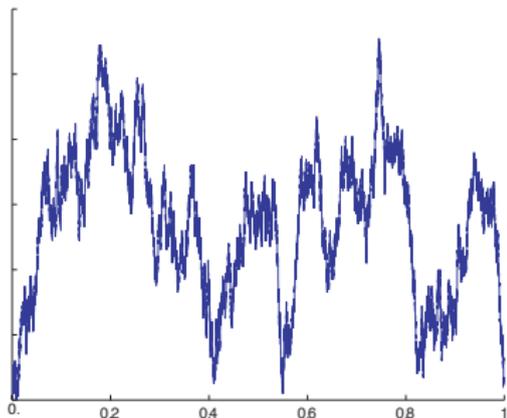
# Construction de l'objet limite

On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



# Construction de l'objet limite

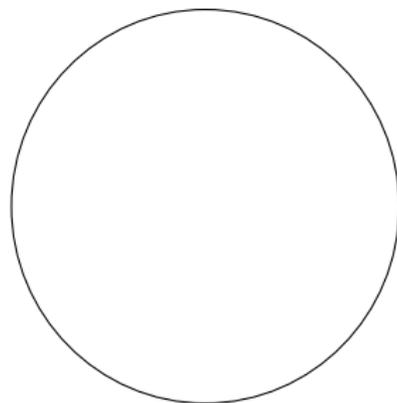
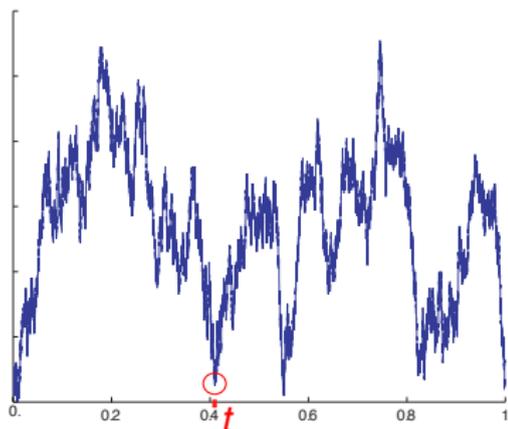
On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



Soit  $t$  un instant de minimum local.

# Construction de l'objet limite

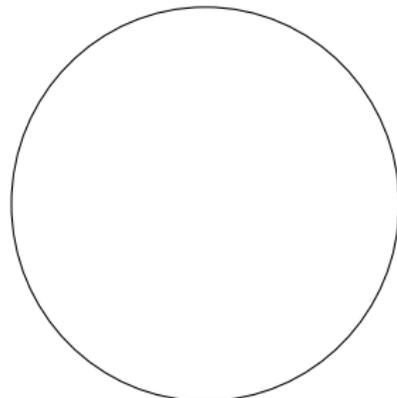
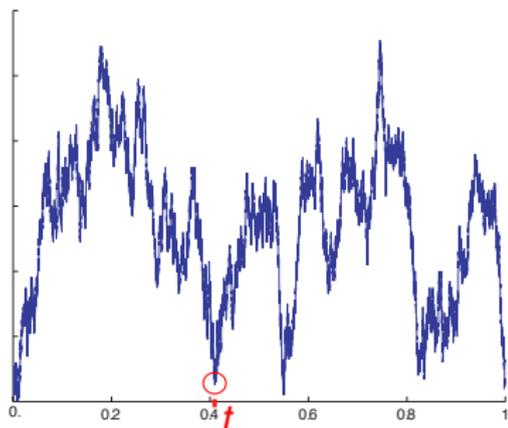
On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



Soit  $t$  un instant de minimum local.

# Construction de l'objet limite

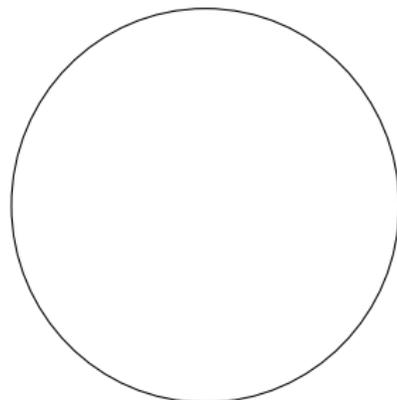
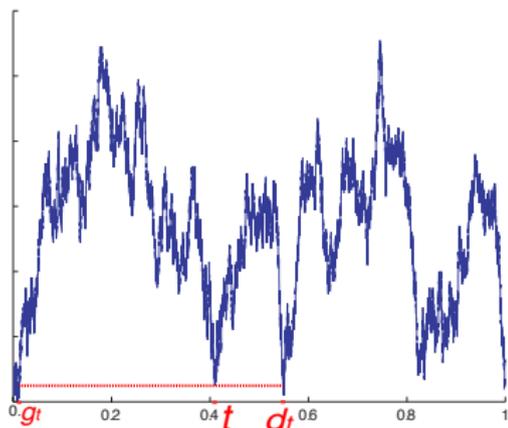
On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



Soit  $t$  un instant de minimum local. On note  $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$  et  $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$ .

# Construction de l'objet limite

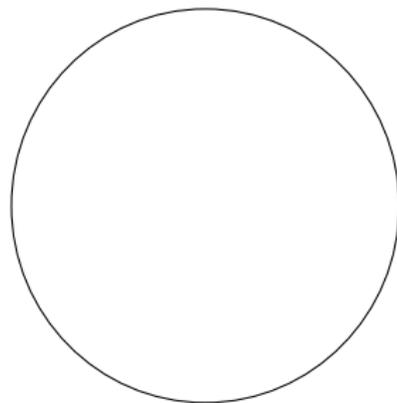
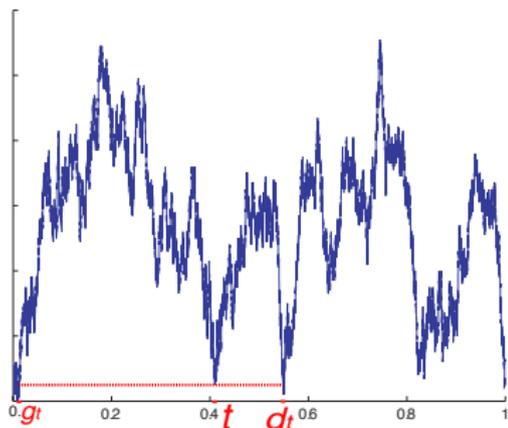
On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



Soit  $t$  un instant de minimum local. On note  $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$  et  $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$ .

# Construction de l'objet limite

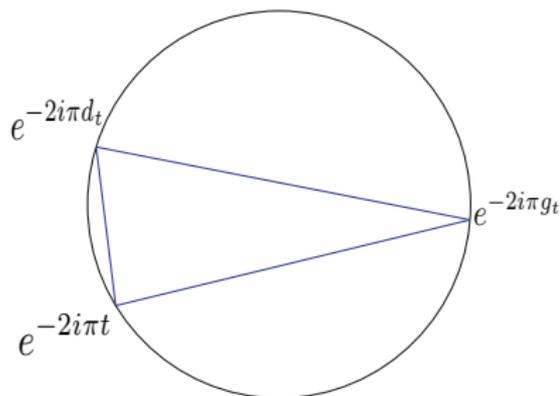
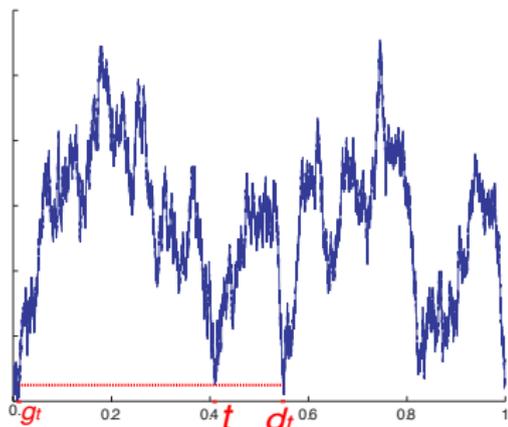
On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



Soit  $t$  un instant de minimum local. On note  $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$  et  $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$ . On trace alors les cordes  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$ ,  $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$  et  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$ .

# Construction de l'objet limite

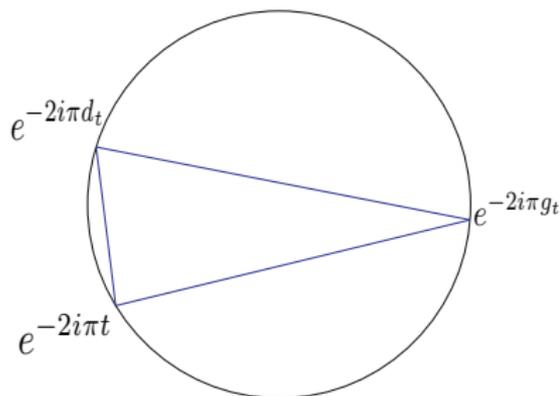
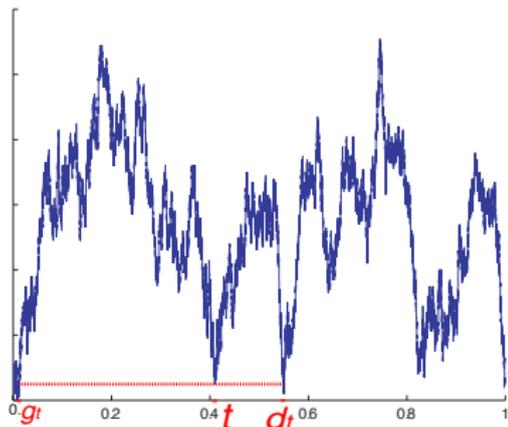
On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



Soit  $t$  un instant de minimum local. On note  $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$  et  $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$ . On trace alors les cordes  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$ ,  $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$  et  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$ .

# Construction de l'objet limite

On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :

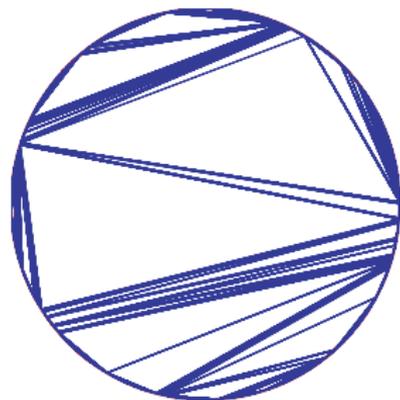
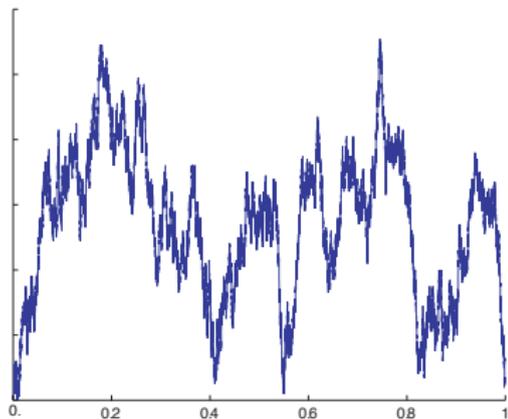


Soit  $t$  un instant de minimum local. On note  $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$  et  $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$ . On trace alors les cordes  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$ ,  $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$  et  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$ .

On fait cela pour tous les instants de minimum local.

# Construction de l'objet limite

On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :

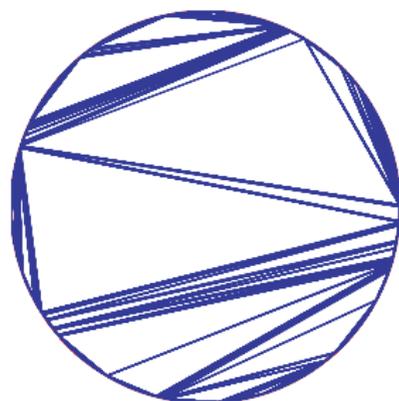
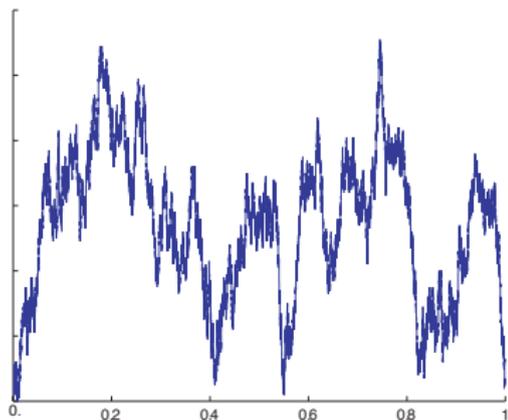


Soit  $t$  un instant de minimum local. On note  $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$  et  $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$ . On trace alors les cordes  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$ ,  $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$  et  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$ .

On fait cela pour tous les instants de minimum local.

# Construction de l'objet limite

On part de l'**excursion brownienne**  $e$  :



Soit  $t$  un instant de minimum local. On note  $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$  et  $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$ . On trace alors les cordes  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$ ,  $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$  et  $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$ .

On fait cela pour tous les instants de minimum local.

L'adhérence de l'objet obtenu, notée  $L(e)$ , est appelée **triangulation brownienne**.

**Théorème** (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ .

**Théorème** (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

**Théorème** (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

### Théorème (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

### Remarques :

↗ Aldous '94 : cette convergence a lieu lorsque  $\chi_n$  est une triangulation **uniforme** de  $P_n$ .

### Théorème (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(\mathfrak{e}),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

### Remarques :

-  Aldous '94 : cette convergence a lieu lorsque  $\chi_n$  est une triangulation **uniforme** de  $P_n$ .
-  Il existe un équivalent « stable » de  $L(\mathfrak{e})$  avec de gros trous (K. '11).

### Théorème (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

### Conséquences :

$\curvearrowright$  La "longueur" de la plus longue diagonale de  $\chi_n$  converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

### Théorème (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

### Conséquences :

↗ La "longueur" de la plus longue diagonale de  $\chi_n$  converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

$$\frac{1}{\pi} \frac{3x-1}{x^2(1-x)^2\sqrt{1-2x}} \mathbf{1}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}} dx.$$

### Théorème (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

### Conséquences :

↗ La "longueur" de la plus longue diagonale de  $\chi_n$  converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

$$\frac{1}{\pi} \frac{3x-1}{x^2(1-x)^2\sqrt{1-2x}} \mathbf{1}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}} dx.$$

Ceci provient d'un petit calcul dans le cas des triangulations uniformes (Aldous '94) !

### Théorème (Curien & K. '12).

Pour  $n \geq 3$ , soit  $\chi_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ , ou un arbre **non croisé uniforme** de  $P_n$  ou encore une transposition **non croisée uniforme** de  $P_{2n}$ . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

### Conséquences :

↗ La "longueur" de la plus longue diagonale de  $\chi_n$  converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

$$\frac{1}{\pi} \frac{3x-1}{x^2(1-x)^2\sqrt{1-2x}} \mathbf{1}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}} dx.$$

Ceci provient d'un petit calcul dans le cas des triangulations uniformes (Aldous '94) !

↗ L'aire de la plus grande face de  $\chi_n$  converge en loi vers l'aire du triangle de plus grande aire de  $L(e)$ .

III. COMMENT PROUVER LA CONVERGENCE DE TOUS CES  
MODÈLES **NON CROISÉS UNIFORMES** VERS LA **TRIANGULATION**  
**BROWNIENNE ?**



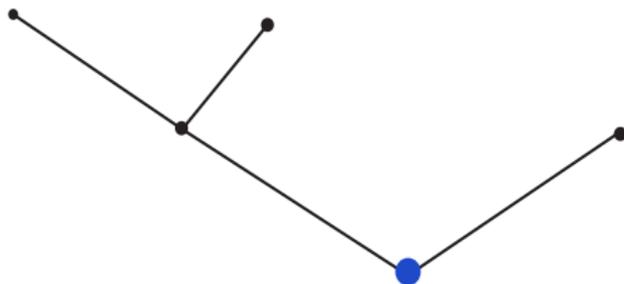
### III. COMMENT PROUVER LA CONVERGENCE DE TOUS CES MODÈLES NON CROISÉS UNIFORMES VERS LA TRIANGULATION BROWNIENNE ?



**Point clé** : chacun de ces modèles peut-être codé par un arbre de Galton-Watson conditionné.

# Rappels sur les arbres de Galton-Watson

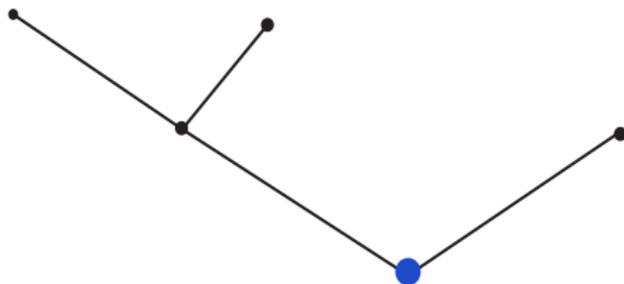
Les arbres seront plans et enracinés.



## Rappels sur les arbres de Galton-Watson

Les arbres seront plans et enracinés.

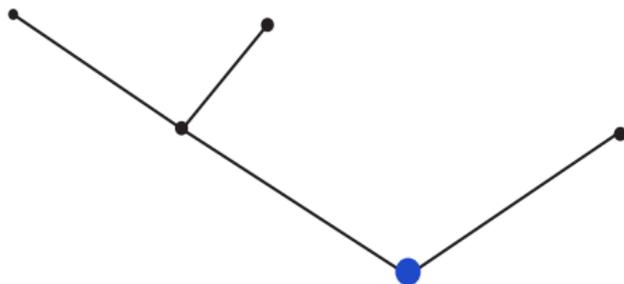
Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  avec  $\sum_i i\rho(i) \leq 1$  et  $\rho(1) < 1$ .



# Rappels sur les arbres de Galton-Watson

Les arbres seront plans et enracinés.

Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  avec  $\sum_i i\rho(i) \leq 1$  et  $\rho(1) < 1$ . Un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\rho$  est un arbre aléatoire tel que :

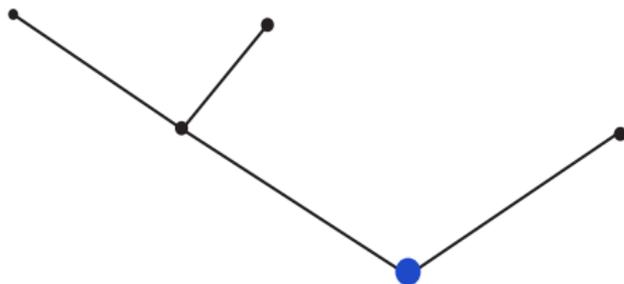


# Rappels sur les arbres de Galton-Watson

Les arbres seront plans et enracinés.

Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  avec  $\sum_i i\rho(i) \leq 1$  et  $\rho(1) < 1$ . Un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\rho$  est un arbre aléatoire tel que :

- $k_\emptyset$  est de loi  $\rho$ , où  $k_\emptyset$  est le nombre d'enfants de la racine.

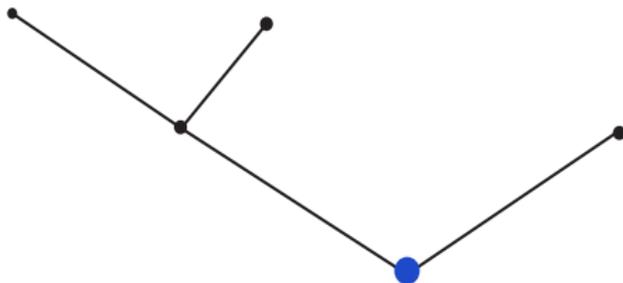


# Rappels sur les arbres de Galton-Watson

Les arbres seront plans et enracinés.

Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  avec  $\sum_i i\rho(i) \leq 1$  et  $\rho(1) < 1$ . Un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\rho$  est un arbre aléatoire tel que :

- $k_\emptyset$  est de loi  $\rho$ , où  $k_\emptyset$  est le nombre d'enfants de la racine.
- pour tout  $j \geq 1$  tel que  $\rho(j) > 0$ , sous  $\mathbb{P}_\rho(\cdot | k_\emptyset = j)$ , le nombre d'enfants des  $j$  enfants de la racine sont indépendants de loi  $\rho$ .



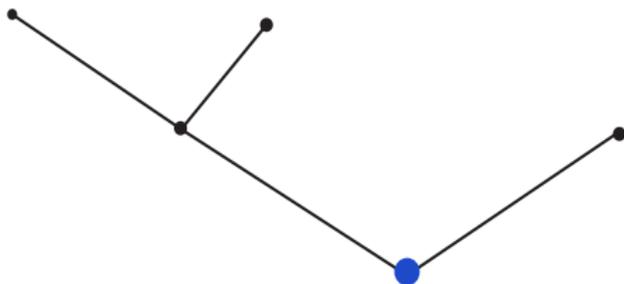
# Rappels sur les arbres de Galton-Watson

Les arbres seront plans et enracinés.

Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  avec  $\sum_i i\rho(i) \leq 1$  et  $\rho(1) < 1$ . Un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\rho$  est un arbre aléatoire tel que :

- $k_\emptyset$  est de loi  $\rho$ , où  $k_\emptyset$  est le nombre d'enfants de la racine.
- pour tout  $j \geq 1$  tel que  $\rho(j) > 0$ , sous  $\mathbb{P}_\rho(\cdot | k_\emptyset = j)$ , le nombre d'enfants des  $j$  enfants de la racine sont indépendants de loi  $\rho$ .

Ici,  $k_\emptyset = 2$ .



# Rappels sur les arbres de Galton-Watson

Les arbres seront plans et enracinés.

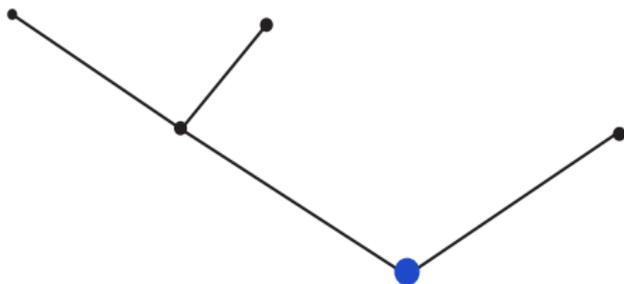
Soit  $\rho$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  avec  $\sum_i i\rho(i) \leq 1$  et  $\rho(1) < 1$ . Un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\rho$  est un arbre aléatoire tel que :

- $k_\emptyset$  est de loi  $\rho$ , où  $k_\emptyset$  est le nombre d'enfants de la racine.
- pour tout  $j \geq 1$  tel que  $\rho(j) > 0$ , sous  $\mathbb{P}_\rho(\cdot | k_\emptyset = j)$ , le nombre d'enfants des  $j$  enfants de la racine sont indépendants de loi  $\rho$ .

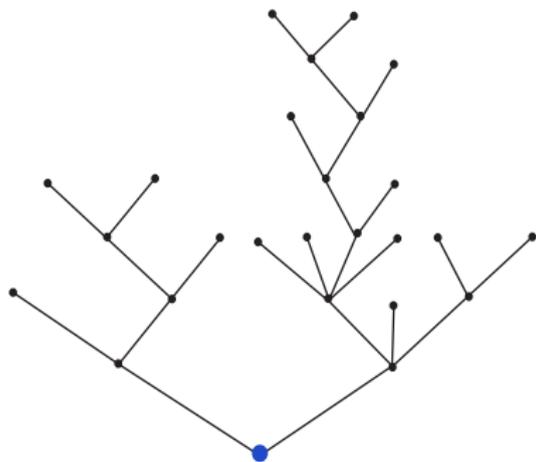
Ici,  $k_\emptyset = 2$ .

On a

$$\mathbb{P}_\rho(\tau) = \prod_{u \in \tau} \rho(k_u).$$

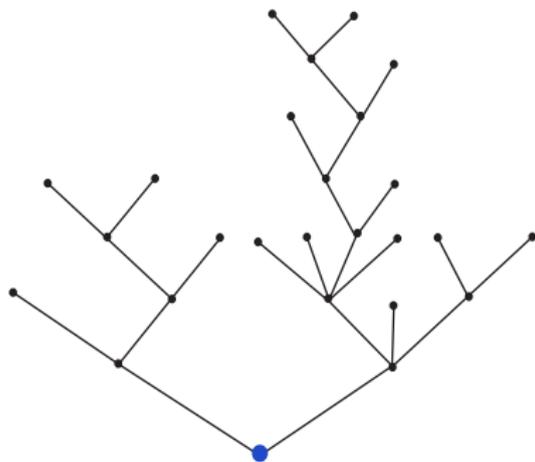


# Codage d'arbres



Définition (de la fonction de contour)

# Codage d'arbres



## Définition (de la fonction de contour)

Un animal préféré explore l'arbre à vitesse unité. Pour  $0 \leq t \leq 2(\zeta(\tau) - 1)$ ,  $C_t(\tau)$  est la distance, à l'instant  $t$ , entre la bête et la racine.



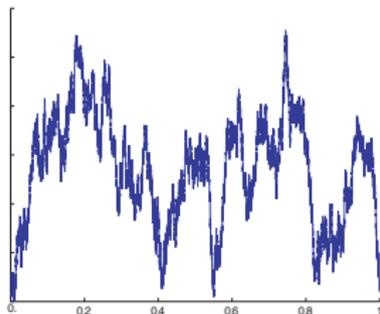
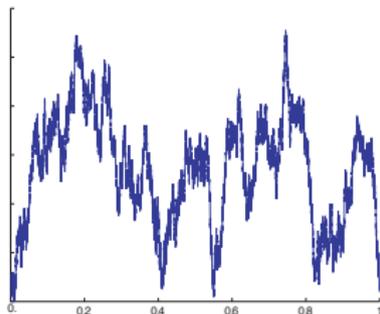


Figure : Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.



**Figure :** Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

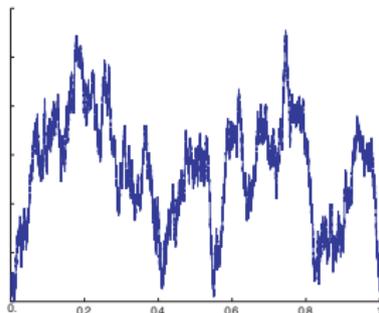


Figure : Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

- 📄 Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de **Galton-Watson conditionné**.

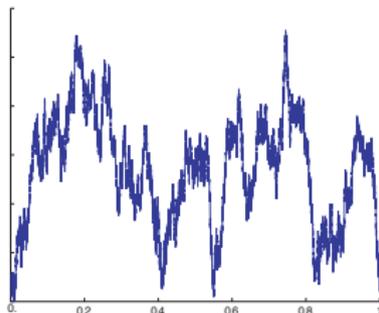
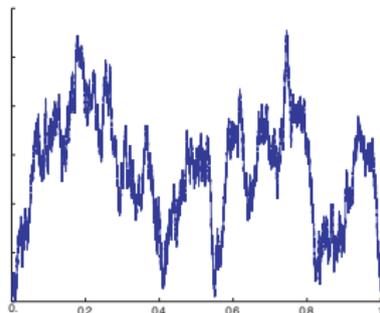


Figure : Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

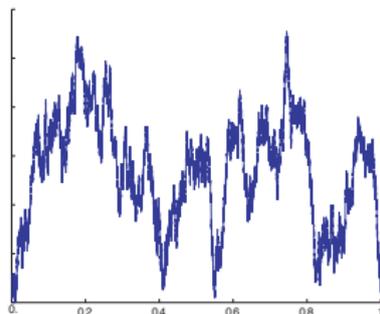
- 📄 Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de **Galton-Watson conditionné**.
- 📄 Les fonctions de contour renormalisées de ces arbres de **Galton-Watson conditionnés** convergent vers **l'excursion brownienne**.



**Figure :** Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

- 📄 Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de Galton-Watson **conditionné**.
- 📄 Les fonctions de contour renormalisées de ces arbres de Galton-Watson **conditionnés** convergent vers **l'excursion brownienne**.
- 📄 **L'excursion brownienne** code la triangulation brownienne  $L(e)$ .



**Figure** : Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

- 📄 Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de Galton-Watson **conditionné**.
- 📄 Les fonctions de contour renormalisées de ces arbres de Galton-Watson **conditionnés** convergent vers l'**excursion brownienne**.
- 📄 L'**excursion brownienne** code la triangulation brownienne  $L(e)$ .

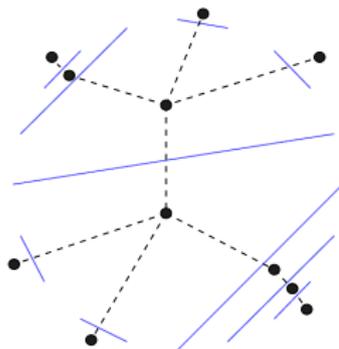
On en déduit la convergence des modèles **non croisés uniformes** vers  $L(e)$ .

Mais comment coder les modèles **uniformes non croisés** par des arbres de Galton-Watson **conditionnés** ?

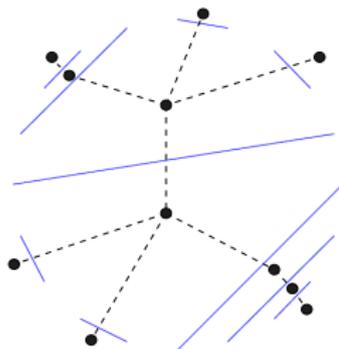
Lien entre transpositions **non croisées** **uniformes** et arbres de **Galton-Watson**.



On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de  $P_{2n}$  :

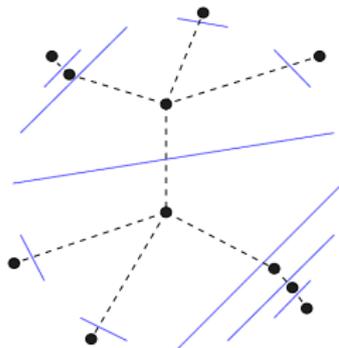


On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de  $P_{2n}$  :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec  $n+1$  sommets.

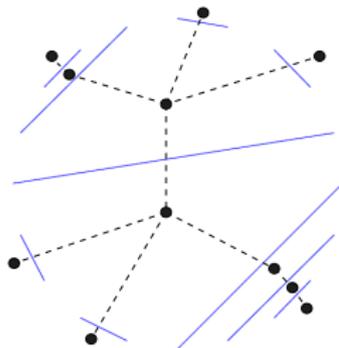
On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de  $P_{2n}$  :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec  $n+1$  sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction  $\nu = \text{Geom}(1/2)$ , **conditionné** à avoir  $n+1$  sommets.

On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de  $P_{2n}$  :

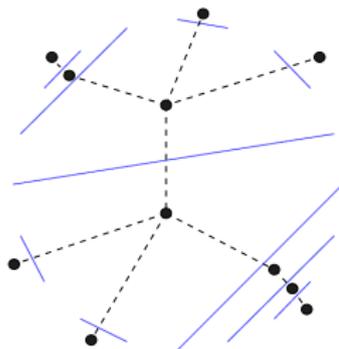


Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec  $n+1$  sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction  $\nu = \text{Geom}(1/2)$ , **conditionné** à avoir  $n+1$  sommets.

La fonction de contour renormalisée de ces arbres converge vers l'**excursion brownienne** (Aldous '93).

On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de  $P_{2n}$  :



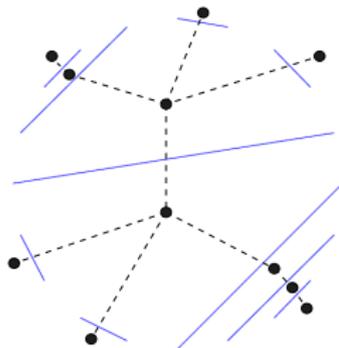
Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec  $n+1$  sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction  $\nu = \text{Geom}(1/2)$ , **conditionné** à avoir  $n + 1$  sommets.

La fonction de contour renormalisée de ces arbres converge vers l'**excursion brownienne** (Aldous '93).

**Idée** : la fonction de contour d'un arbre de **Galton-Watson** se comporte comme une marche aléatoire.

On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de  $P_{2n}$  :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec  $n+1$  sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction  $\nu = \text{Geom}(1/2)$ , **conditionné** à avoir  $n + 1$  sommets.

La fonction de contour renormalisée de ces arbres converge vers l'**excursion brownienne** (Aldous '93).

**Idée** : la fonction de contour d'un arbre de **Galton-Watson** se comporte comme une marche aléatoire.

Il s'ensuit que les transpositions **non croisées uniformes** de  $P_{2n}$  convergent vers la **triangulation brownienne**.

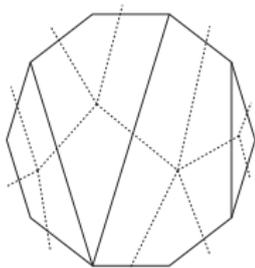
Codage des dissections uniformes par des arbres de Galton-Watson conditionnés.



# *Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson*

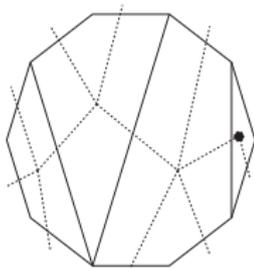
On considère le dual d'une dissection **uniforme** de  $P_n$

:



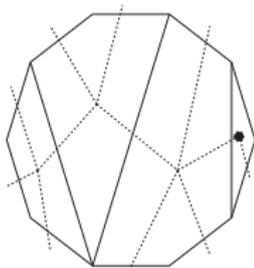
# *Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson*

On considère le dual d'une dissection **uniforme** de  $P_n$ , convenablement enraciné :



# Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

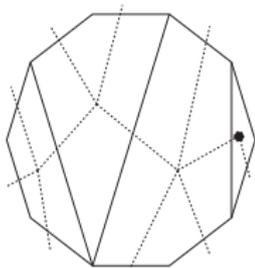
On considère le dual d'une dissection **uniforme** de  $P_n$ , convenablement enraciné :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec  $n - 1$  feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant.

# Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

On considère le dual d'une dissection **uniforme** de  $P_n$ , convenablement enraciné :



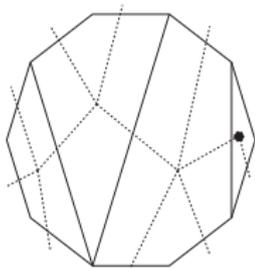
Il s'agit d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec  $n - 1$  feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant.

**Proposition** (Curien & K. '12, Pitman & Rizzolo '11).

La loi d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec  $n - 1$  feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant est la loi d'un  $\text{GW}_{\mu_0}$  arbre de loi de reproduction  $\mu_0$  **conditionné** à avoir  $n - 1$  feuilles, où :

# Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

On considère le dual d'une dissection **uniforme** de  $P_n$ , convenablement enraciné :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec  $n - 1$  feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant.

**Proposition** (Curien & K. '12, Pitman & Rizzolo '11).

La loi d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec  $n - 1$  feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant est la loi d'un  $\text{GW}_{\mu_0}$  arbre de loi de reproduction  $\mu_0$  **conditionné** à avoir  $n - 1$  feuilles, où :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1} \quad \text{pour } i \geq 2.$$

# *Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson*

La fonction de contour renormalisée de  $\text{GW}_{\mu_0}$  arbres conditionnés à avoir beaucoup de feuilles converge vers l'**excursion brownienne** (K. '11).

# *Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson*

La fonction de contour renormalisée de  $\text{GW}_{\mu_0}$  arbres conditionnés à avoir beaucoup de feuilles converge vers l'excursion brownienne (K. '11).

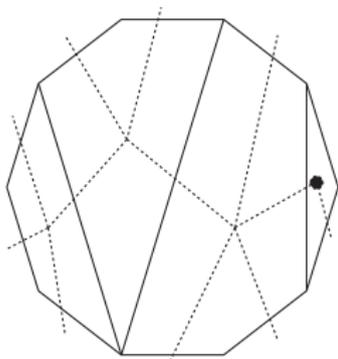
Il s'ensuit que les dissections uniformes de  $P_n$  convergent vers la triangulation brownienne.

**Conclusion** : Dans tous ces modèles **uniformes**, il y a de l'**indépendance**.

## IV. APPLICATION À L'ÉTUDE DES DISSECTIONS UNIFORMES



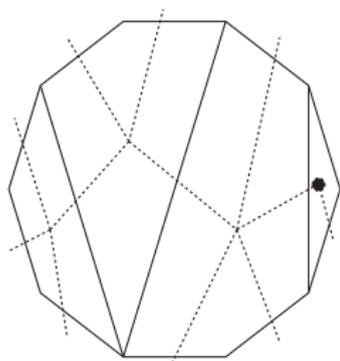
# Application à l'étude des dissections uniformes



Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

# Application à l'étude des dissections uniformes



Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

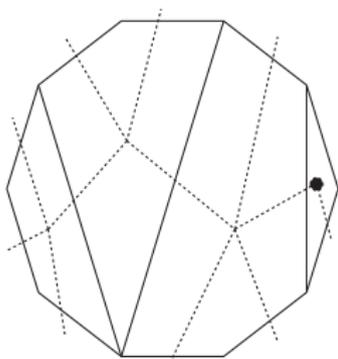
**Application 1 (Compter les dissections).** Preuve probabiliste du résultat suivant :

## Théorème (Flajolet & Noy '99)

Soit  $a_n$  le nombre de dissections de  $P_n$ . Alors :

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{99\sqrt{2} - 140}{\pi}} n^{-3/2} (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

# Application à l'étude des dissections uniformes

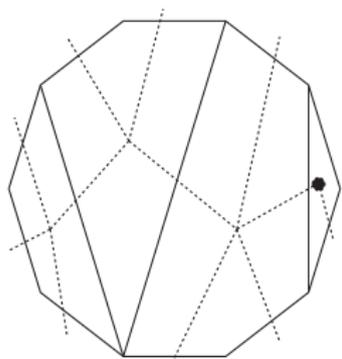


Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

**Application 2. (Étude du degré maximal d'une face)** On note  $D^{(n)}$  le degré maximal d'une face de  $\mathcal{D}_n$ .

# Application à l'étude des dissections uniformes



Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

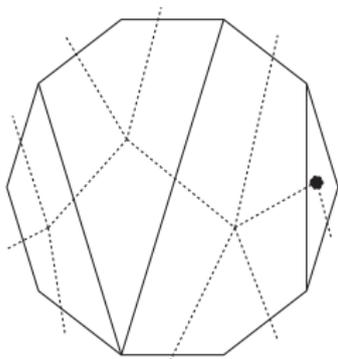
**Application 2. (Étude du degré maximal d'une face)** On note  $D^{(n)}$  le degré maximal d'une face de  $\mathcal{D}_n$ .

**Théorème (Curien & K. '12)**

Soit  $\beta = 2 + \sqrt{2}$ . Pour tout  $c > 0$ , on a :

$$\mathbb{P}(\log_{\beta}(n) - c \log_{\beta} \log_{\beta}(n) \leq D^{(n)} \leq \log_{\beta}(n) + c \log_{\beta} \log_{\beta}(n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

# Application à l'étude des dissections uniformes



Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

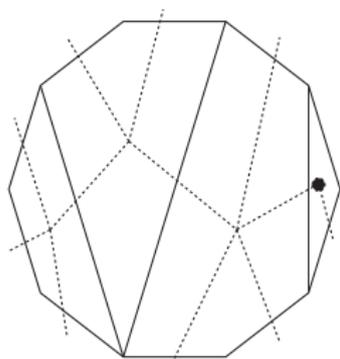
$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

## Application 3. (Étude du degré d'un sommet).

### Théorème (Curien & K. '12)

Soit  $\partial^{(n)}$  le nombre de diagonales adjacentes au sommet d'affixe 1 dans  $\mathcal{D}_n$ .

# Application à l'étude des dissections uniformes



Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

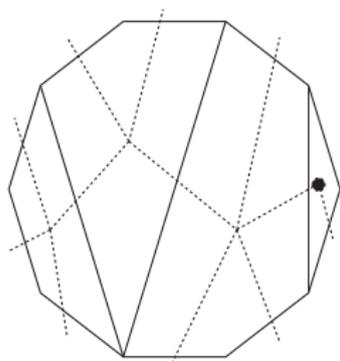
## Application 3. (Étude du degré d'un sommet).

### Théorème (Curien & K. '12)

Soit  $\partial^{(n)}$  le nombre de diagonales adjacentes au sommet d'affixe 1 dans  $\mathcal{D}_n$ . Alors  $\partial^{(n)}$  converge en loi vers la somme de deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètre  $\sqrt{2} - 1$ , c-à-d pour  $k \geq 0$  on a :

$$\mathbb{P}(\partial^{(n)} = k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (k + 1)\mu_0^2(1 - \mu_0)^k.$$

# Application à l'étude des dissections uniformes



Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

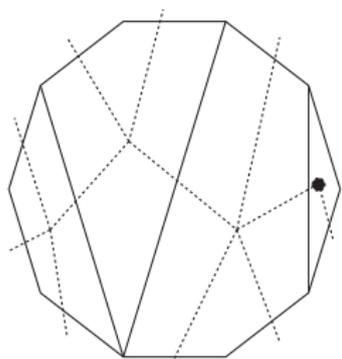
$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

**Application 4. (Étude du degré maximal d'un sommet).** Preuve d'une conjecture de Bernasconi, Panagiotou & Steger :

**Théorème (Curien & K. '12)**

Soit  $\Delta^{(n)}$  le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de  $\mathcal{D}_n$ .

# Application à l'étude des dissections uniformes



Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Rappel : Le dual enraciné de  $\mathcal{D}_n$  est un arbre de loi  $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$ , où ( $i \geq 1$ ) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

**Application 4. (Étude du degré maximal d'un sommet).** Preuve d'une conjecture de Bernasconi, Panagiotou & Steger :

**Théorème (Curien & K. '12)**

Soit  $\Delta^{(n)}$  le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de  $\mathcal{D}_n$ . Soit  $b = \sqrt{2} + 1$ . Alors pour tout  $c > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(\Delta^{(n)} \geq \log_b(n) + \log_b \log_b(n) + c \log_b \log_b(n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

## Conjecture

Soit  $\Delta^{(n)}$  le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de  $\mathcal{D}_n$ . Soit  $b = \sqrt{2} + 1$ . Pour tout  $c > 0$  :

$$\mathbb{P} \left( \left| \Delta^{(n)} - (\log_b(n) + \log_b \log_b(n)) \right| > c \log_b \log_b(n) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

(vérifiée pour une autre valeur de  $b$  dans le cas des triangulations par Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger '99 et Gao & Wormald '00)

## Conjecture

Soit  $\Delta^{(n)}$  le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de  $\mathcal{D}_n$ . Soit  $b = \sqrt{2} + 1$ . Pour tout  $c > 0$  :

$$\mathbb{P} \left( \left| \Delta^{(n)} - (\log_b(n) + \log_b \log_b(n)) \right| > c \log_b \log_b(n) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(vérifiée pour une autre valeur de  $b$  dans le cas des triangulations par Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger '99 et Gao & Wormald '00)

*Merci pour votre attention!*

