

# Une excursion en géométrie combinatoire

Xavier Goaoc

Projet VEGAS - Nancy



# Une ~~excursion~~ marche en géométrie combinatoire

Xavier Goaoc

Projet VEGAS - Nancy



La géométrie combinatoire s'intéresse aux **aspects discrets** d'objets géométriques (éventuellement continus).

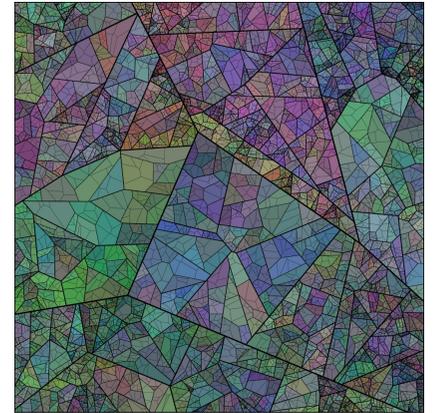
*Packing & covering*

Polytopes

Partitions de l'espace

Configurations de points ou d'objets géométriques

(Hyper)Graphes géométriques



La géométrie combinatoire s'intéresse aux **aspects discrets** d'objets géométriques (éventuellement continus).

*Packing & covering*

Polytopes

Partitions de l'espace

Configurations de points ou d'objets géométriques

(Hyper)Graphes géométriques

Intégrée avec

La géométrie algorithmique.

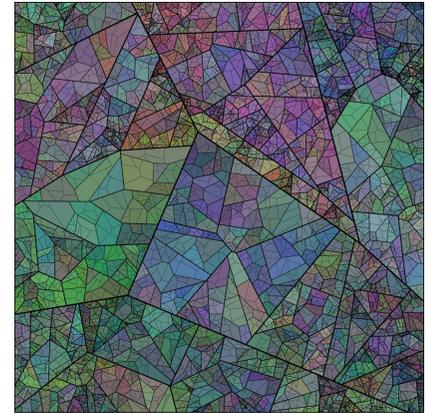
Nombreuses passerelles vers

L'algorithmique en général.

L'optimisation

Les combinatoires

Les probabilités (*probabilistic method*)



La géométrie combinatoire s'intéresse aux **aspects discrets** d'objets géométriques (éventuellement continus).

*Packing & covering*

Polytopes

Partitions de l'espace

Configurations de points ou d'objets géométriques

(Hyper)Graphes géométriques

Intégrée avec

La géométrie algorithmique.

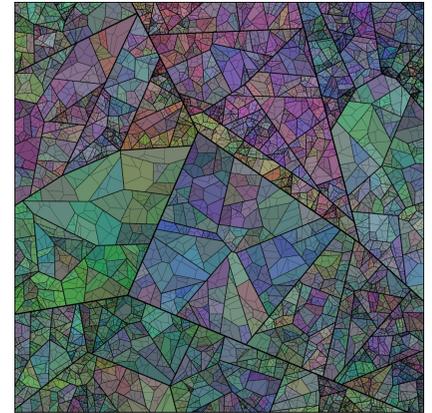
Nombreuses passerelles vers

L'algorithmique en général.

L'optimisation

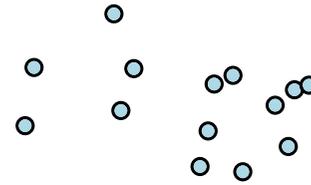
Les combinatoires

Les probabilités (*probabilistic method*)



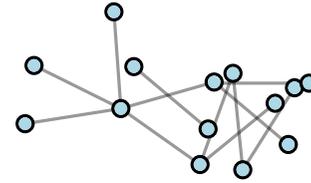
Un premier exemple...

**Question :** [Erdős, 1946] *How often can a given distance occur among  $n$  points in the plane?*



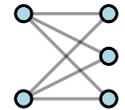
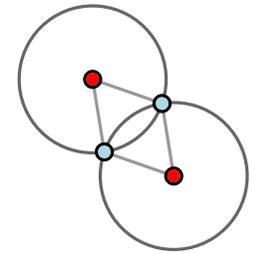
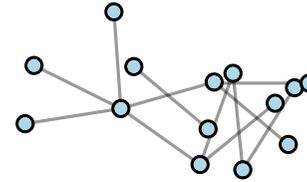
Un premier exemple...

**Question :** [Erdős, 1946] *How often can a given distance occur among  $n$  points in the plane?*



Un premier exemple...

**Question :** [Erdős, 1946] *How often can a given distance occur among  $n$  points in the plane?*



Le **graphe distance-unité** n'a pas de **sous-graphe** isomorphe à  $K_{2,3}$ .

Graphe  $G = (S, E)$  où  $S$  est l'ensemble de points et  $E = \{(p, q) \in S^2 : \|p - q\|_2 = 1\}$ .

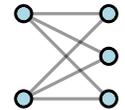
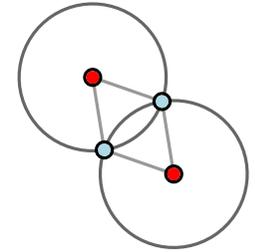
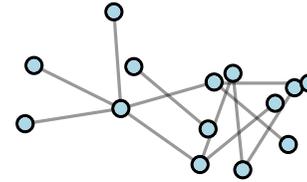
Deux sommets ont au plus deux voisins communs dans  $G$ .

**Théorème.** [Kövari, Sós, Turán, 1954] *Soit  $r \geq s$ . Tout graphe biparti à  $n$  sommets sans sous-graphe isomorphe à  $K_{s,r}$  a  $O(n^{2-\frac{1}{s}})$  arêtes.*

**Conclusion :** une distance se répète au maximum  $O(n\sqrt{n})$  fois.

Un premier exemple...

**Question :** [Erdős, 1946] *How often can a given distance occur among  $n$  points in the plane?*



Le **graphe distance-unité** n'a pas de **sous-graphe** isomorphe à  $K_{2,3}$ .

Graphe  $G = (S, E)$  où  $S$  est l'ensemble de points et  $E = \{(p, q) \in S^2 : \|p - q\|_2 = 1\}$ .

Deux sommets ont au plus deux voisins communs dans  $G$ .

**Théorème.** [Kövari, Sós, Turán, 1954] *Soit  $r \geq s$ . Tout graphe biparti à  $n$  sommets sans sous-graphe isomorphe à  $K_{s,r}$  a  $O(n^{2-\frac{1}{s}})$  arêtes.*

$G$  n'est pas biparti, mais peut le devenir quitte à jeter au plus **la moitié** des arêtes.

*Bicolorer les sommets aléatoirement, équiprobablement et indépendamment.*

*En moyenne, la moitié des arêtes sont bichromatiques.*

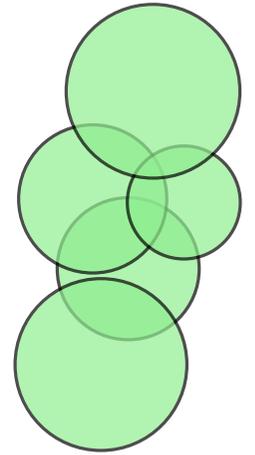
**Conclusion :** une distance se répète au maximum  $O(n\sqrt{n})$  fois.

1. Arrangements et séquences de Davenport-Schinzel
2. Couvertures multiples et lemme local de Lovász
3. Géométrie des incidences
4. Quelques problèmes ouverts

## Les **arrangements** au sens **géométrique**.

L'**arrangement** d'une famille d'objets géométriques du plan est la **subdivision** du plan induite par les bords de ces objets.

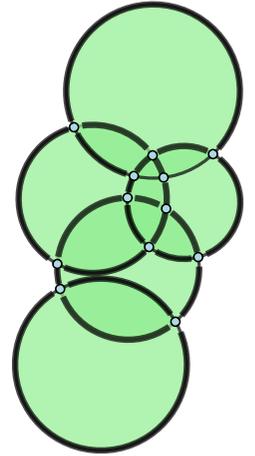
*Structure combinatoire plongée (ie c'est une **carte planaire**).*  
*On suppose que toute paire d'objets se coupe en un nombre fini de points.*



## Les arrangements au sens géométrique.

L'**arrangement** d'une famille d'objets géométriques du plan est la **subdivision** du plan induite par les bords de ces objets.

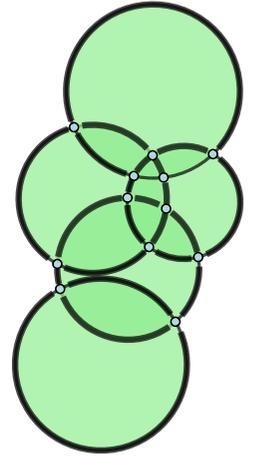
*Structure combinatoire plongée (ie c'est une **carte plane**).*  
*On suppose que toute paire d'objets se coupe en un nombre fini de points.*



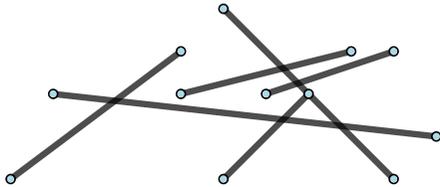
## Les arrangements au sens géométrique.

L'**arrangement** d'une famille d'objets géométriques du plan est la **subdivision** du plan induite par les bords de ces objets.

*Structure combinatoire plongée (ie c'est une **carte plane**).*  
*On suppose que toute paire d'objets se coupe en un nombre fini de points.*



Diverses **sous-structures** ou **raffinements** intéressants.



Un arrangement de 6 segments.

Leur **enveloppe inférieure**.

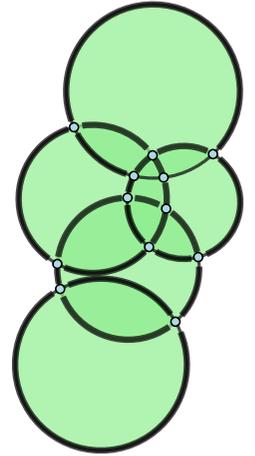
Leur **décomposition trapézoïdale**.

La **zone** d'un 7<sup>e</sup> segment.

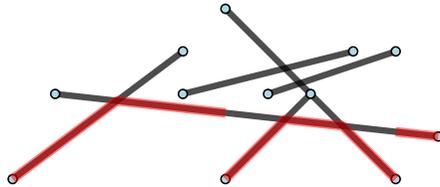
## Les arrangements au sens géométrique.

L'**arrangement** d'une famille d'objets géométriques du plan est la **subdivision** du plan induite par les bords de ces objets.

*Structure combinatoire plongée (ie c'est une **carte plane**).*  
*On suppose que toute paire d'objets se coupe en un nombre fini de points.*



Diverses **sous-structures** ou **raffinements** intéressants.



Un arrangement de 6 segments.

Leur **enveloppe inférieure**.

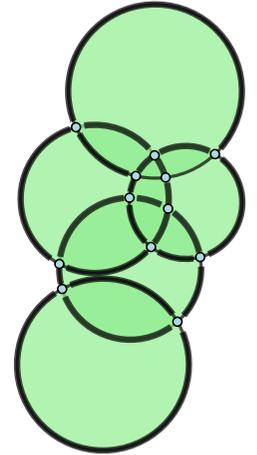
Leur **décomposition trapézoïdale**.

La **zone** d'un 7<sup>e</sup> segment.

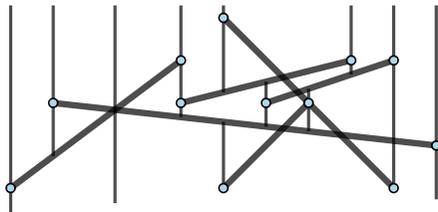
## Les arrangements au sens géométrique.

L'**arrangement** d'une famille d'objets géométriques du plan est la **subdivision** du plan induite par les bords de ces objets.

*Structure combinatoire plongée (ie c'est une **carte plane**).*  
*On suppose que toute paire d'objets se coupe en un nombre fini de points.*



Diverses **sous-structures** ou **raffinements** intéressants.



Un arrangement de 6 segments.

Leur **enveloppe inférieure**.

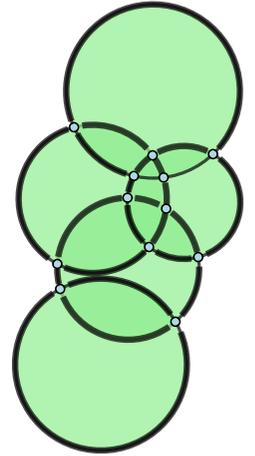
Leur **décomposition trapézoïdale**.

La **zone** d'un 7<sup>e</sup> segment.

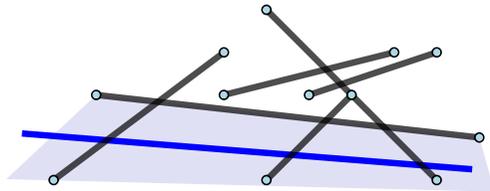
## Les arrangements au sens géométrique.

L'**arrangement** d'une famille d'objets géométriques du plan est la **subdivision** du plan induite par les bords de ces objets.

*Structure combinatoire plongée (ie c'est une **carte plane**).*  
*On suppose que toute paire d'objets se coupe en un nombre fini de points.*



Diverses **sous-structures** ou **raffinements** intéressants.



Un arrangement de 6 segments.

Leur **enveloppe inférieure**.

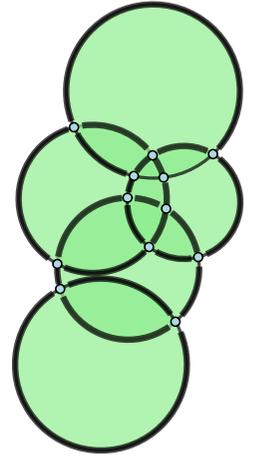
Leur **décomposition trapézoïdale**.

La **zone** d'un 7<sup>e</sup> segment.

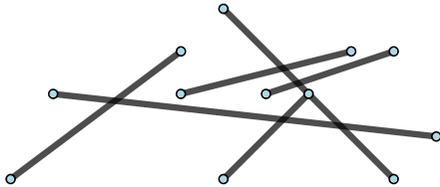
## Les **arrangements** au sens **géométrique**.

L'**arrangement** d'une famille d'objets géométriques du plan est la **subdivision** du plan induite par les bords de ces objets.

*Structure combinatoire plongée (ie c'est une **carte plane**).*  
*On suppose que toute paire d'objets se coupe en un nombre fini de points.*



Diverses **sous-structures** ou **raffinements** intéressants.



Un arrangement de 6 segments.

Leur **enveloppe inférieure**.

Leur **décomposition trapézoïdale**.

La **zone** d'un 7<sup>e</sup> segment.

Question **centrale** en géométrie combinatoire :

Estimer l'**asymptotique** de la complexité de diverses sous-structures d'arrangements.

Notion de **complexité** (d'une sous-structure) d'un arrangement.

Le nombre d'**éléments**, toutes dimensions confondues.

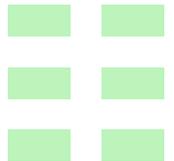
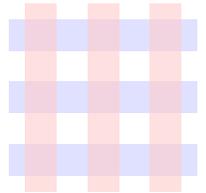
$$\# \text{ sommets} + \# \text{ arêtes} + \# \text{ faces.}$$

Exprimée comme une fonction du nombre  $n$  d'objets.

Dans le **cas le pire** vis-à-vis du positionnement.

Éventuellement pour une **classe restreinte** d'objets.

*Droites, segments, cercles, carrés, rectangles...*  
*En position arbitraire, congruents par translation...*



Notion de **complexité** (d'une sous-structure) d'un arrangement.

Le nombre d'**éléments**, toutes dimensions confondues.

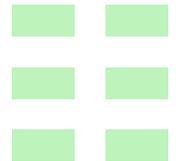
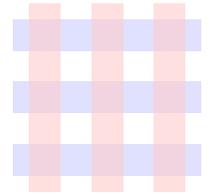
$$\# \text{ sommets} + \# \text{ arêtes} + \# \text{ faces.}$$

Exprimée comme une fonction du nombre  $n$  d'objets.

Dans le **cas le pire** vis-à-vis du positionnement.

Éventuellement pour une **classe restreinte** d'objets.

*Droites, segments, cercles, carrés, rectangles...  
En position arbitraire, congruents par translation...*



## Applications

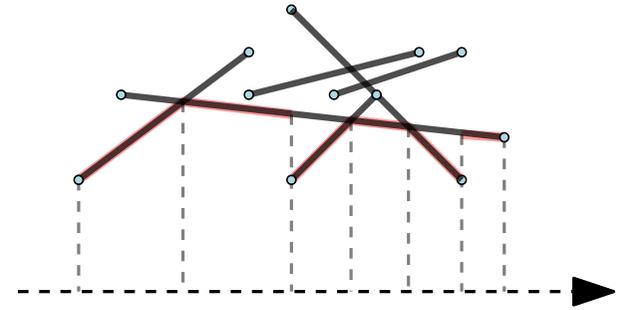
Robotique (plannification de trajectoire)

Fouille de données (*range searching* et variantes)

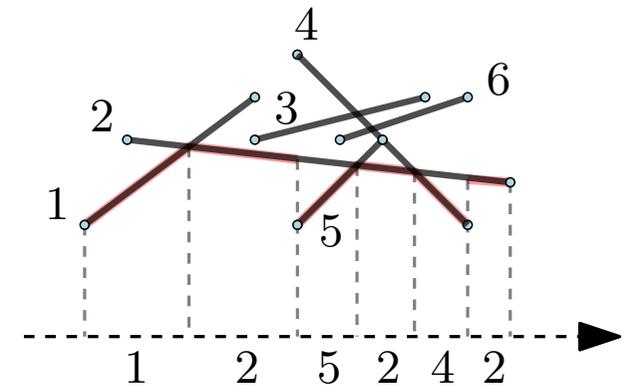
En visualisation (cartes de visibilité)

Complexité algorithmique (structure des espaces de configurations)

**Question :** *Quelle est la complexité de l'enveloppe inférieure de  $n$  segments du plan ?*



**Question :** *Quelle est la complexité de l'enveloppe inférieure de  $n$  segments du plan ?*

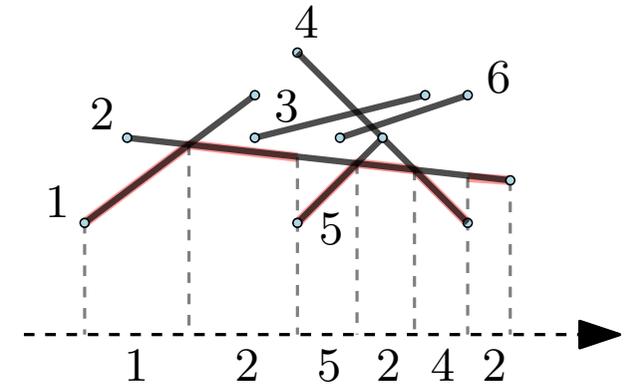


Enveloppe inférieure de  $n$  segments  $\rightarrow$  un mot sur l'alphabet  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

*Numéroter les segments.*

*Lire pour chaque intervalle de l'enveloppe inférieure le No du segment le plus bas.*

**Question :** *Quelle est la complexité de l'enveloppe inférieure de  $n$  segments du plan ?*



Enveloppe inférieure de  $n$  segments  $\rightarrow$  un mot sur l'alphabet  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

*Numéroter les segments.*

*Lire pour chaque intervalle de l'enveloppe inférieure le No du segment le plus bas.*

Ce mot obéit à deux règles :



(1) Deux lettres consécutives sont nécessairement distinctes.

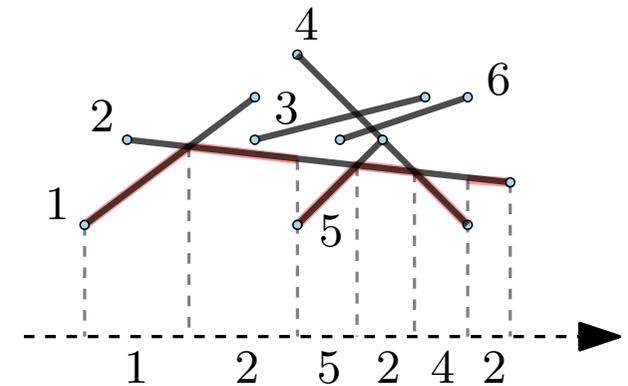
(2) Pas de sous-mot  $a \dots b \dots a \dots b \dots a$  quelque soient les lettres  $a, b$ .

*Une alternance entre  $a$  et  $b$  correspond à une intersection entre  $a$  et  $b$   
ou à une extrémité de  $a$  ou de  $b$ .*

*Au plus 4 extrémités + 1 intersection.*

*La première et la dernière extrémité ne font pas d'alternance.*

**Question :** *Quelle est la complexité de l'enveloppe inférieure de  $n$  segments du plan ?*



Enveloppe inférieure de  $n$  segments  $\rightarrow$  un mot sur l'alphabet  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

*Numéroter les segments.*

*Lire pour chaque intervalle de l'enveloppe inférieure le No du segment le plus bas.*

Ce mot obéit à deux règles :

- (1) Deux lettres consécutives sont nécessairement distinctes.
- (2) Pas de sous-mot  $a \dots b \dots a \dots b \dots a$  quelque soient les lettres  $a, b$ .

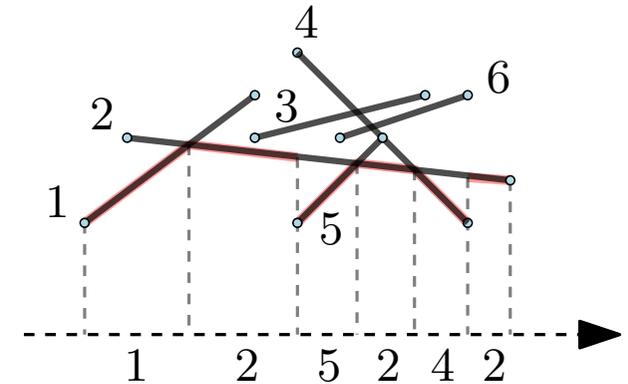


*Une alternance entre  $a$  et  $b$  correspond à une intersection entre  $a$  et  $b$   
ou à une extrémité de  $a$  ou de  $b$ .*

*Au plus 4 extrémités + 1 intersection.*

*La première et la dernière extrémité ne font pas d'alternance.*

**Question :** *Quelle est la complexité de l'enveloppe inférieure de  $n$  segments du plan ?*



Enveloppe inférieure de  $n$  segments  $\rightarrow$  un mot sur l'alphabet  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

*Numéroter les segments.*

*Lire pour chaque intervalle de l'enveloppe inférieure le No du segment le plus bas.*

Ce mot obéit à deux règles :

- (1) Deux lettres consécutives sont nécessairement distinctes.
- (2) Pas de sous-mot  $a \dots b \dots a \dots b \dots a$  quelque soient les lettres  $a, b$ .



*Une alternance entre  $a$  et  $b$  correspond à une intersection entre  $a$  et  $b$  ou à une extrémité de  $a$  ou de  $b$ .*

*Au plus 4 extrémités + 1 intersection.*

*La première et la dernière extrémité ne font pas d'alternance.*

Quelle est la taille maximale  $\lambda_3(n)$  d'un tel mot ?

**Théorème.** [Hart-Sharir, 1986]  $\lambda_3(n) = \Theta(n\alpha(n))$ .

Fonction d'Ackermann :  $n \mapsto A_n(n)$

$$\text{avec : } \begin{cases} A_1(n) = 2n \\ A_k(n) = A_{k-1}(A_k(n-1)) \end{cases}$$

Réciproque :  $\alpha(n) = \min\{k \geq 1 : A_k(k) \geq n\}$ .

$\alpha(n) \leq 4$  pour tout  $n \leq 2^{2^{\dots^2}}$  (tour de 65536 exponentielles).

**Théorème.** [Hart-Sharir, 1986]  $\lambda_3(n) = \Theta(n\alpha(n))$ .

Fonction d'Ackermann :  $n \mapsto A_n(n)$

avec : 
$$\begin{cases} A_1(n) = 2n \\ A_k(n) = A_{k-1}(A_k(n-1)) \end{cases}$$

Réciproque :  $\alpha(n) = \min\{k \geq 1 : A_k(k) \geq n\}$ .

$\alpha(n) \leq 4$  pour tout  $n \leq 2^{2^{\dots^2}}$  (tour de 65536 exponentielles).

Décomposer en facteurs sans répétition de lettres et obtenir une séquence de relations d'inductions.

Construction récursive de séquences atteignant la borne inférieure.

Lien (codage) avec des *path compressions on trees*.

Inspiré par l'analyse de structures *union-find* de [Tarjan, 1975].

**Théorème.** [Hart-Sharir, 1986]  $\lambda_3(n) = \Theta(n\alpha(n))$ .

Fonction d'Ackermann :  $n \mapsto A_n(n)$

avec : 
$$\begin{cases} A_1(n) = 2n \\ A_k(n) = A_{k-1}(A_k(n-1)) \end{cases}$$

Réciproque :  $\alpha(n) = \min\{k \geq 1 : A_k(k) \geq n\}$ .

$\alpha(n) \leq 4$  pour tout  $n \leq 2^{2^{\dots^2}}$  (tour de 65536 exponentielles).

Décomposer en facteurs sans répétition de lettres et obtenir une séquence de relations d'inductions.

Construction récursive de séquences atteignant la borne inférieure.

Lien (codage) avec des *path compressions on trees*.

Inspiré par l'analyse de structures *union-find* de [Tarjan, 1975].

**Théorème.** L'enveloppe inférieure de  $n$  segments du plan a complexité  $\Theta(n\alpha(n))$ .

Borne supérieure immédiate.

La construction combinatoire se réalise géométriquement.

Une **séquence de Davenport-Schinzel** de paramètre  $(n, s)$  est un mot sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que

- (1) Deux lettres consécutives sont nécessairement distinctes.
- (2) Pas d'alternance de  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  de longueur  $s + 2$ .

Une **séquence de Davenport-Schinzel** de paramètre  $(n, s)$  est un mot sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que

- (1) Deux lettres consécutives sont nécessairement distinctes.
- (2) Pas d'alternance de  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  de longueur  $s + 2$ .

Ex. maximal de paramètre  $(3,3)$  : 12131323

Une **séquence de Davenport-Schinzel** de paramètre  $(n, s)$  est un mot sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que

- (1) Deux lettres consécutives sont nécessairement distinctes.
- (2) Pas d'alternance de  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  de longueur  $s + 2$ .

Ex. maximal de paramètre  $(3,3)$  : 12131323

$\lambda_s(n)$  mesure la **longueur maximale** d'une séquence de Davenport-Schinzel.

$$\lambda_1(n) = n \text{ et } \lambda_2(n) = 2n - 1$$

$$\forall s \geq 3, \quad \lambda_s(n) \leq C(s)n \log^* n$$

[Szemerédi, 1974]

$$\lambda_3(n) \sim_{n \rightarrow \infty} 2n\alpha(n)$$

[Klazar, 2002] [Nivasch, 2010]

Une **séquence de Davenport-Schinzel** de paramètre  $(n, s)$  est un mot sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que

- (1) Deux lettres consécutives sont nécessairement distinctes.
- (2) Pas d'alternance de  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  de longueur  $s + 2$ .

Ex. maximal de paramètre  $(3,3)$  : 12131323

$\lambda_s(n)$  mesure la **longueur maximale** d'une séquence de Davenport-Schinzel.

$$\lambda_1(n) = n \text{ et } \lambda_2(n) = 2n - 1$$

$$\forall s \geq 3, \quad \lambda_s(n) \leq C(s)n \log^* n \quad \text{[Szemerédi, 1974]}$$

$$\lambda_3(n) \sim_{n \rightarrow \infty} 2n\alpha(n) \quad \text{[Klazar, 2002] [Nivasch, 2010]}$$

En général, pas d'équivalent connu mais ordre de grandeur cerné.

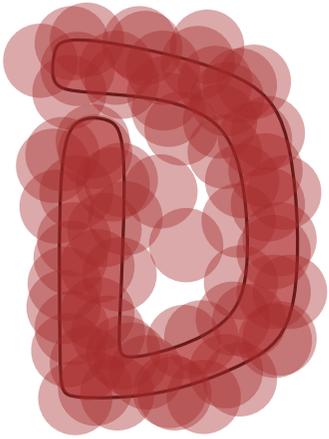
$$\text{Ex. : } n2^{\alpha(n)-O(1)} \leq \lambda_4(n) \leq n2^{\alpha(n)+O(1)} \quad \text{[Agarwal-Sharir-Shor, 1989][Nivasch, 2010]}$$

Généralisations, étude d'autres aspects, etc...

c.f. Klazar et thèse de Nivasch

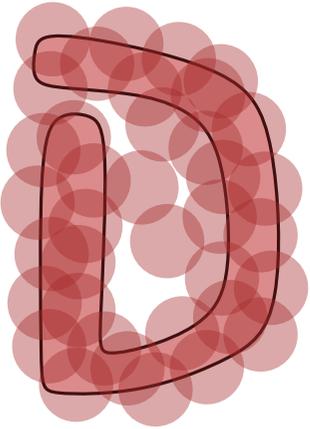
Génération aléatoire ( $s = 2$ ) [Gardy - Gouyou-Beauchamps, 1992]

1. Arrangements et séquences de Davenport-Schinzel
2. Couvertures multiples et lemme local de Lovász
3. Géométrie des incidences
4. Quelques problèmes ouverts



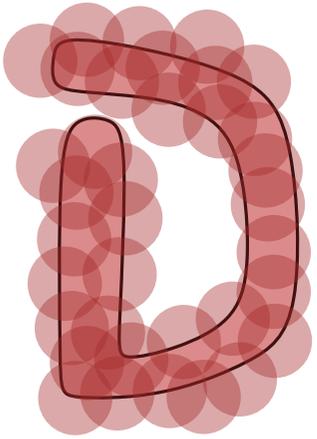
Une *k*-couverture d'un domaine  $D$  est une famille d'objets telle que tout point de  $D$  est contenu dans au moins  $k$  objets.

Une *k*-couverture  $F$  de  $D$  est *décomposable* si elle s'écrit  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  et chaque  $F_i$  est une 1-couverture de  $D$ .



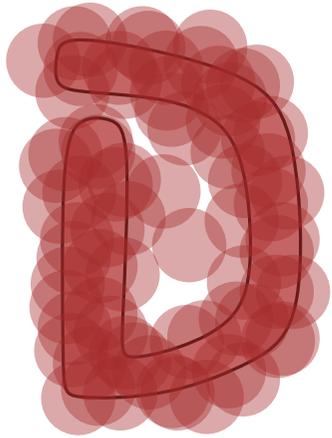
Une  $k$ -couverture d'un domaine  $D$  est une famille d'objets telle que tout point de  $D$  est contenu dans au moins  $k$  objets.

Une  $k$ -couverture  $F$  de  $D$  est **décomposable** si elle s'écrit  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  et chaque  $F_i$  est une 1-couverture de  $D$ .



Une  $k$ -couverture d'un domaine  $D$  est une famille d'objets telle que tout point de  $D$  est contenu dans au moins  $k$  objets.

Une  $k$ -couverture  $F$  de  $D$  est **décomposable** si elle s'écrit  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  et chaque  $F_i$  est une 1-couverture de  $D$ .



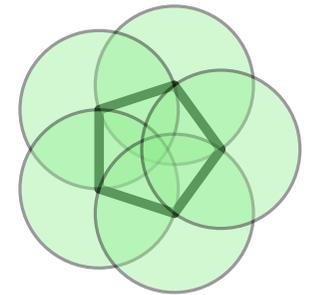
Une  $k$ -couverture d'un domaine  $D$  est une famille d'objets telle que tout point de  $D$  est contenu dans au moins  $k$  objets.

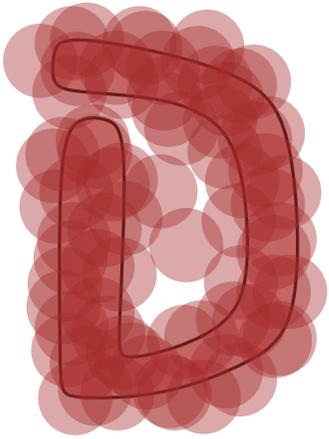
Une  $k$ -couverture  $F$  de  $D$  est **décomposable** si elle s'écrit  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  et chaque  $F_i$  est une 1-couverture de  $D$ .

Est-ce qu'une couverture suffisante garantit la décomposabilité ?

*Redondance dans des réseaux...*

Il existe des 2-couvertures non décomposables.



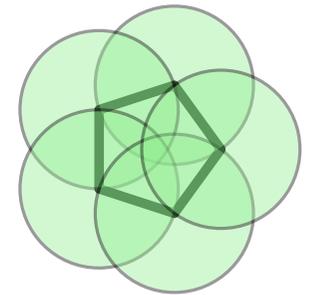


Une  $k$ -couverture d'un domaine  $D$  est une famille d'objets telle que tout point de  $D$  est contenu dans au moins  $k$  objets.

Une  $k$ -couverture  $F$  de  $D$  est **décomposable** si elle s'écrit  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  et chaque  $F_i$  est une 1-couverture de  $D$ .

Est-ce qu'une couverture suffisante garantit la décomposabilité ?

*Redondance dans des réseaux...*



Il existe des 2-couvertures non décomposables.

**Théorème.** [Mani-Levitska - Pach, 1988]

- (1) Toute 33-couverture de  $\mathbb{R}^2$  par des disques unité est décomposable.
- (2) Pour tout  $k$ , il existe une  $k$ -couverture de  $\mathbb{R}^3$  par des boules unité qui est indécomposable.
- (3) Pour tout  $k$ , toute  $k$ -couverture de  $\mathbb{R}^3$  par des boules unité telle qu'aucun point n'est couvert plus de  $2^{k/3-8}$  fois est décomposable.

Déduisons

(3) Pour tout  $k$ , toute  $k$ -couverture de  $\mathbb{R}^3$  par des boules unité telle qu'aucun point n'est couvert plus de  $2^{k/3-8}$  fois est décomposable.

de

**Lemme local de Lovász.** Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements dans un espace de probabilité. Supposons que chaque  $A_i$  se produit avec probabilité **au plus**  $p$  et est dépendant d'**au plus**  $d$  autres événements.

Si  $ep(d+1) < 1$  alors la probabilité qu'**aucun**  $A_i$  ne se produise est positive.

Déduisons

(3) Pour tout  $k$ , toute  $k$ -couverture de  $\mathbb{R}^3$  par des boules unité telle qu'aucun point n'est couvert plus de  $2^{k/3-8}$  fois est décomposable.

de

**Lemme local de Lovász.** Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements dans un espace de probabilité. Supposons que chaque  $A_i$  se produit avec probabilité **au plus**  $p$  et est dépendant d'**au plus**  $d$  autres événements.

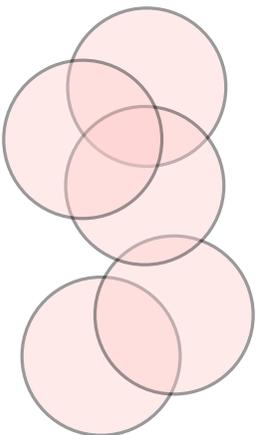
Si  $ep(d+1) < 1$  alors la probabilité qu'**aucun**  $A_i$  ne se produise est positive.

On **colorie aléatoirement** les boules de notre  $k$ -couverture avec  $\{R, B\}$ .

*Indépendamment, avec équiprobabilité.*

On obtient une décomposition si aucun point n'est contenu que dans des  $R$  ou que dans des  $B$ .

Un point  $\rightarrow$  un événement  $A_i$



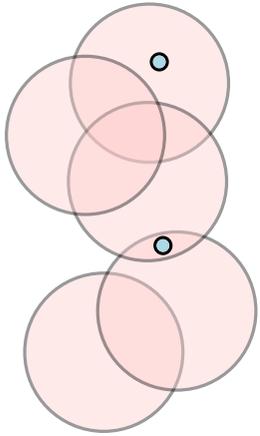
En fait, on a un événement par **face de l'arrangement** des boules.

La probabilité que  $A_i$  se produise est  $\leq p = \frac{2}{2^k}$ .

Chaque événement est dépendant d'au plus  $d = 2^{k-6}$  autres événements.

$ep(d+1) \leq e2^{-4} < 1$  donc **il existe** une décomposition.

Chaque événement est dépendant d'au plus  $d = 2^{k-6}$  autres événements.



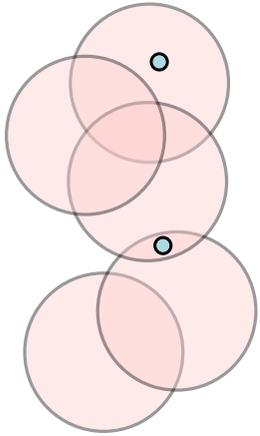
Deux événements sont dépendants s'ils correspondent à des points  $p$  et  $q$  contenus dans deux boules  $B_p \ni p$  and  $B_q \ni q$  avec  $B_p \cap B_q \neq \emptyset$ .

En particulier  $B_q$  est contenu dans la boule de centre  $p$  et rayon 4.

*Le centre de  $B_p$  est à distance  $\leq 1$  de  $p$ .*

*Le centre de  $B_q$  est à distance  $\leq 2$  de celui de  $B_p$ .*

Chaque événement est dépendant d'au plus  $d = 2^{k-6}$  autres événements.



Deux événements sont dépendants s'ils correspondent à des points  $p$  et  $q$  contenus dans deux boules  $B_p \ni p$  and  $B_q \ni q$  avec  $B_p \cap B_q \neq \emptyset$ .

En particulier  $B_q$  est contenu dans la boule de centre  $p$  et rayon 4.

*Le centre de  $B_p$  est à distance  $\leq 1$  de  $p$ .*

*Le centre de  $B_q$  est à distance  $\leq 2$  de celui de  $B_p$ .*

La boule de centre  $p$  et rayon 4 contient au plus  $2^{k/3-2}$  boules de la  $k$ -couverture.

*Le volume d'une boule de rayon 4 égale  $4^3$  celui d'une boule de rayon 1.*

*Aucun point ne peut être couvert plus de  $2^{k/3-8}$  fois par hypothèse.*

L'arrangement de ces  $\leq 2^{k/3-2}$  boules contient  $\leq 2^{k-6}$  régions.

*L'arrangement de  $m$  boules dans  $\mathbb{R}^3$  définit au plus  $m^3$  régions.*

On vient de borner le **nombre chromatique** de certains **hypergraphes géométriques**.

Un **hypergraphe** sur un ensemble  $X$  est un **ensemble de sous-ensembles** de  $X$ .

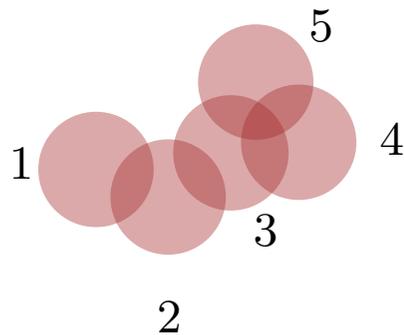
On vient de borner le **nombre chromatique** de certains **hypergraphes géométriques**.

Un **hypergraphe** sur un ensemble  $X$  est un **ensemble de sous-ensembles** de  $X$ .

Deux hypergraphes naturels associés à une famille  $F$  d'objets de  $\mathbb{R}^3$ .

$$H_{\text{primal}} = \{P \subset \mathbb{R}^3 : P \text{ est un objet de } F\}.$$

$$H_{\text{dual}} = \{G \subseteq F : \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x \text{ est dans tout objet de } G \text{ et aucun autre } \}.$$



$$H_{\text{dual}} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \\ \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}\}$$

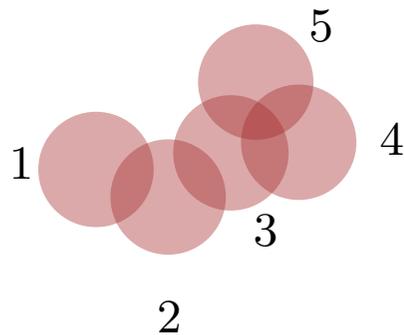
On vient de borner le **nombre chromatique** de certains **hypergraphes géométriques**.

Un **hypergraphe** sur un ensemble  $X$  est un **ensemble de sous-ensembles** de  $X$ .

Deux hypergraphes naturels associés à une famille  $F$  d'objets de  $\mathbb{R}^3$ .

$$H_{\text{primal}} = \{P \subset \mathbb{R}^3 : P \text{ est un objet de } F\}.$$

$$H_{\text{dual}} = \{G \subseteq F : \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x \text{ est dans tout objet de } G \text{ et aucun autre } \}.$$



$$H_{\text{dual}} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \\ \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}\}$$

**Colorier** un hypergraphe c'est affecter des couleurs aux éléments de  $X$  de sorte qu'aucun des sous-ensembles retenus ne soit **monochrome**.

Une  $k$ -couverture est décomposable ssi son hypergraphe dual est **2-coloriable**.

*Une  $k$ -couverture  $F$  de  $D$  est décomposable si elle s'écrit  $F = F_1 \cup F_2$  avec  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  et chaque  $F_i$  est une 1-couverture de  $D$ .*

1. Arrangements et séquences de Davenport-Schinzel
2. Couvertures multiples et lemme local de Lovász
3. Géométrie des incidences
4. Quelques problèmes ouverts

Une question de John Hopcroft :

**Hopcroft's problem:** étant donnés  $n$  droites et  $n$  points dans le plan, comment décider efficacement si au moins une des droites contient au moins un des points ?

$\simeq$  complexité de détecter l'existence d'une **incidence**.

Une question de John Hopcroft :

**Hopcroft's problem:** étant donnés  $n$  droites et  $n$  points dans le plan, comment décider efficacement si au moins une des droites contient au moins un des points ?

$\simeq$  complexité de détecter l'existence d'une **incidence**.

Une séquence d'algorithmes de complexité  $O(n^{1.695}) \rightarrow O(n^{4/3} 2^{O(\log^* n)})$ .

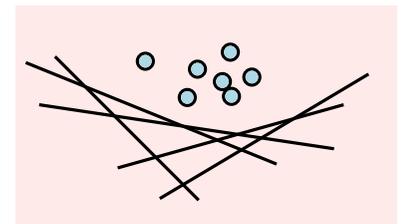
*Diviser pour régner à base de partitions de l'espace.*

[Chazelle, 1986]  $\rightarrow$  [Matoušek, 1993]

Une borne inférieure de  $\Omega(n^{4/3})$ .

*Dans un modèle à base de partition de l'espace capturant les algorithmes ci-dessus.*

[Erickson, 1996]



Une question de John Hopcroft :

**Hopcroft's problem:** étant donnés  $n$  droites et  $n$  points dans le plan, comment décider efficacement si au moins une des droites contient au moins un des points ?

$\simeq$  complexité de détecter l'existence d'une **incidence**.

Une séquence d'algorithmes de complexité  $O(n^{1.695}) \rightarrow O(n^{4/3} 2^{O(\log^* n)})$ .

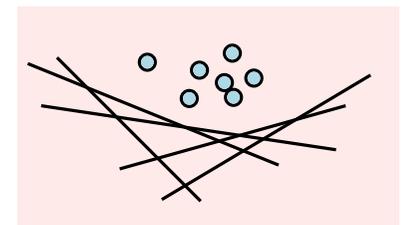
*Diviser pour régner à base de partitions de l'espace.*

[Chazelle, 1986]  $\rightarrow$  [Matoušek, 1993]

Une borne inférieure de  $\Omega(n^{4/3})$ .

*Dans un modèle à base de partition de l'espace capturant les algorithmes ci-dessus.*

[Erickson, 1996]

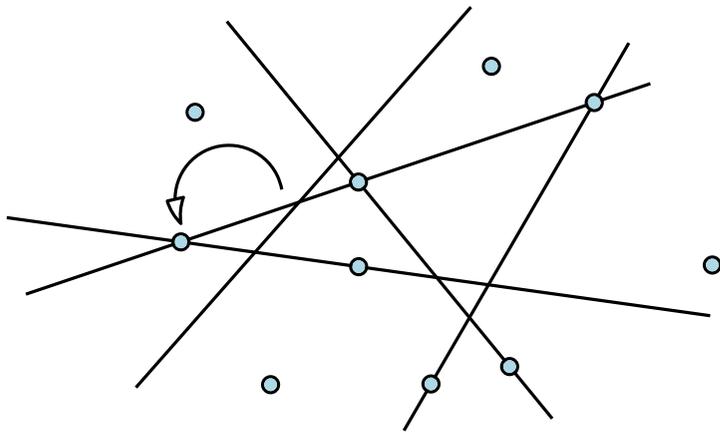


Une “explication” géométrique :

**Théorème.** [Szemerédi-Trotter, 1983] Le nombre d'incidences entre  $n$  points et  $\ell$  droites du plan est  $O(n + \ell + n^{2/3} \ell^{2/3})$ .

**Théorème.** [Szemerédi-Trotter, 1983] Le nombre d'incidences entre  $n$  points et  $l$  droites du plan est  $O(n + l + n^{2/3}l^{2/3})$ .

Preuve :



Partir d'une famille de  $n$  points et  $l$  droites.

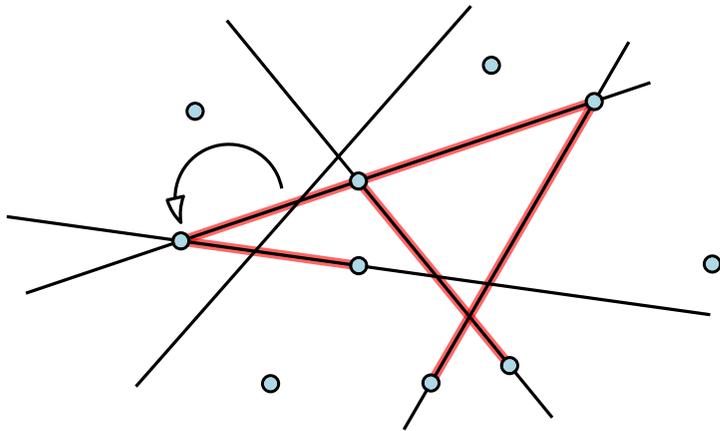
Notons  $k$  le nombre d'incidences point/droite.

Considérer le graphe de sommets les points et dont les arêtes joignent les points **incidents à une même droite** et **consécutifs** sur cette droite.

Ce graphe a au plus  $k$  arêtes.

**Théorème.** [Szemerédi-Trotter, 1983] Le nombre d'incidences entre  $n$  points et  $l$  droites du plan est  $O(n + l + n^{2/3}l^{2/3})$ .

Preuve :



Partir d'une famille de  $n$  points et  $l$  droites.

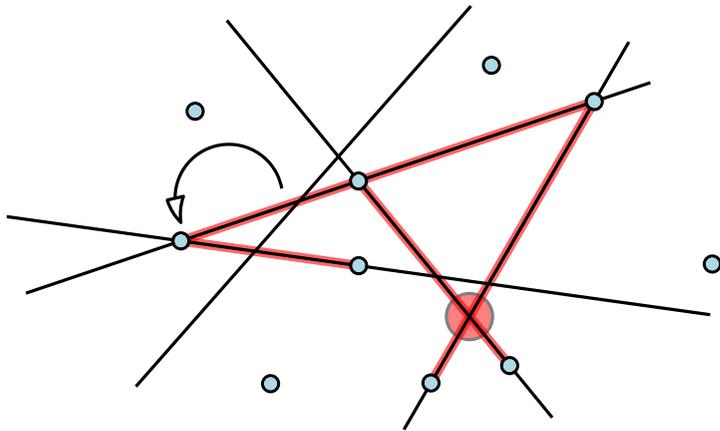
Notons  $k$  le nombre d'incidences point/droite.

Considérer le graphe de sommets les points et dont les arêtes joignent les points **incidents à une même droite** et **consécutifs** sur cette droite.

Ce graphe a au plus  $k$  arêtes.

**Théorème.** [Szemerédi-Trotter, 1983] Le nombre d'incidences entre  $n$  points et  $\ell$  droites du plan est  $O(n + \ell + n^{2/3}\ell^{2/3})$ .

Preuve :



Partir d'une famille de  $n$  points et  $\ell$  droites.

Notons  $k$  le nombre d'incidences point/droite.

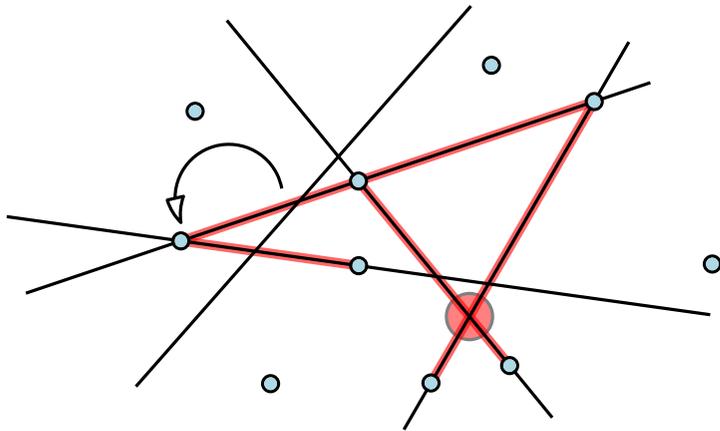
Considérer le graphe de sommets les points et dont les arêtes joignent les points **incidents à une même droite** et **consécutifs** sur cette droite.

Ce graphe a au plus  $k$  arêtes.

Dans le tracé naturel de ce graphe ces arêtes forment au plus  $\binom{\ell}{2}$  croisements.

**Théorème.** [Szemerédi-Trotter, 1983] Le nombre d'incidences entre  $n$  points et  $\ell$  droites du plan est  $O(n + \ell + n^{2/3}\ell^{2/3})$ .

Preuve :



Partir d'une famille de  $n$  points et  $\ell$  droites.

Notons  $k$  le nombre d'incidences point/droite.

Considérer le graphe de sommets les points et dont les arêtes joignent les points **incidents à une même droite** et **consécutifs** sur cette droite.

Ce graphe a au plus  $k$  arêtes.

Dans le tracé naturel de ce graphe ces arêtes forment au plus  $\binom{\ell}{2}$  croisements.

Le **crossing lemma** énonce qu'un graphe à  $e$  arêtes et  $v$  sommets a **au moins**  $\frac{e^3}{64v^2}$  croisements dès lors que  $e \geq 4v$ .

$$k = O(n) \text{ ou } \frac{k^3}{64n^2} \leq \binom{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad k = O(n + \ell + n^{2/3}\ell^{2/3}). \quad \square$$

**Crossing lemma.** Soit  $G$  un graphe à  $v$  sommets et  $e$  arêtes. Si  $e \geq 4v$  alors dans tout tracé de  $G$  dans le plan, le nombre de paires d'arêtes se croisant est au moins  $\frac{e^3}{64v^2}$ .

[Leighton, 1983] [Ajtai-Chvátal-Newborn-Szemerédi, 1982]

Conjecturé par [Erdős-Guy, 1972]

**Crossing lemma.** Soit  $G$  un graphe à  $v$  sommets et  $e$  arêtes. Si  $e \geq 4v$  alors dans tout tracé de  $G$  dans le plan, le nombre de paires d'arêtes se croisant est au moins  $\frac{e^3}{64v^2}$ .

[Leighton, 1983] [Ajtai-Chvátal-Newborn-Szemerédi, 1982]

Conjecturé par [Erdős-Guy, 1972]

Soit  $Cr(G)$  le nombre **minimum** de croisements dans un dessin de  $G$  dans le plan.

Un graphe planaire a  $\leq 3v$  arêtes donc  $Cr(G) \geq e - 3v$ .

*Formule d'Euler :  $v - e + f = 2$*

*Double comptage :  $2e \geq 3f$*

**Crossing lemma.** Soit  $G$  un graphe à  $v$  sommets et  $e$  arêtes. Si  $e \geq 4v$  alors dans tout tracé de  $G$  dans le plan, le nombre de paires d'arêtes se croisant est au moins  $\frac{e^3}{64v^2}$ .

[Leighton, 1983] [Ajtai-Chvátal-Newborn-Szemerédi, 1982]

Conjecturé par [Erdős-Guy, 1972]

Soit  $Cr(G)$  le nombre **minimum** de croisements dans un dessin de  $G$  dans le plan.

Un graphe planaire a  $\leq 3v$  arêtes donc  $Cr(G) \geq e - 3v$ .

*Formule d'Euler :  $v - e + f = 2$*

*Double comptage :  $2e \geq 3f$*

On **échantillonne** le graphe et on regarde le dessin **induit**.

*On garde chaque sommet avec **probabilité**  $p$ .*

*On garde chaque arête & croisement ssi on garde tous les sommets impliqués.*

**Crossing lemma.** Soit  $G$  un graphe à  $v$  sommets et  $e$  arêtes. Si  $e \geq 4v$  alors dans tout tracé de  $G$  dans le plan, le nombre de paires d'arêtes se croisant est au moins  $\frac{e^3}{64v^2}$ .

[Leighton, 1983] [Ajtai-Chvátal-Newborn-Szemerédi, 1982]

Conjecturé par [Erdős-Guy, 1972]

Soit  $Cr(G)$  le nombre **minimum** de croisements dans un dessin de  $G$  dans le plan.

Un graphe planaire a  $\leq 3v$  arêtes donc  $Cr(G) \geq e - 3v$ .

*Formule d'Euler :  $v - e + f = 2$*

*Double comptage :  $2e \geq 3f$*

On **échantillonne** le graphe et on regarde le dessin **induit**.

*On garde chaque sommet avec **probabilité**  $p$ .*

*On garde chaque arête & croisement ssi on garde tous les sommets impliqués.*

Soit  $G_p$  l'échantillon. On a :  $E[Cr(G_p)] \leq p^4 Cr(G)$  et  $E[Cr(G_p)] \geq p^2 e - 3pv$ .

On optimise le choix de  $p$  : prendre  $p = \frac{4v}{e}$  donne la borne annoncée.  $\square$

## Application aux bornes **Somme-produit**.

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$  un ensemble de  $n$  entiers.

Notons  $A + A = \{a + b, (a, b) \in A \times A\}$  et  $A \cdot A = \{ab, (a, b) \in A \times A\}$ .

*Si  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  alors  $|A + A|$  est petit mais  $|A \cdot A|$  est grand.*

*Si  $A = \{2, 4, \dots, 2^n\}$  alors  $|A \cdot A|$  est petit mais  $|A + A|$  est grand.*

**Conjecture.** [Erdős-Szemerédi, 1983] Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $C_\epsilon$  telle que si  $|A|$  est suffisamment grand alors  $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq C_\epsilon |A|^{2-\epsilon}$ .

## Application aux bornes **Somme-produit**.

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$  un ensemble de  $n$  entiers.

Notons  $A + A = \{a + b, (a, b) \in A \times A\}$  et  $A \cdot A = \{ab, (a, b) \in A \times A\}$ .

*Si  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  alors  $|A + A|$  est petit mais  $|A \cdot A|$  est grand.*

*Si  $A = \{2, 4, \dots, 2^n\}$  alors  $|A \cdot A|$  est petit mais  $|A + A|$  est grand.*

**Conjecture.** [Erdős-Szemerédi, 1983] Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $C_\epsilon$  telle que si  $|A|$  est suffisamment grand alors  $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq C_\epsilon |A|^{2-\epsilon}$ .

Associer à  $A$  des points  $P = (A + A) \times (A \cdot A)$  et droites  $L = \{y = a(x - b) : a, b \in A\}$ .

Le nombre d'incidence est **au moins**  $|A||L|$ .

*Chaque droite  $y = a(x - b)$  contient chacun des points  $(c + b, a \cdot c)$  pour  $c \in A$ .*

La borne sur les incidences donne  $|A||L| = O(|P|^{2/3}|L|^{2/3})$ .

$|A + A||A \cdot A| = \Omega(|A|^{5/2})$  et donc  $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(|A|^{5/4})$ .

$|P| = |A + A| * |A \cdot A|$  et  $|L| = |A|^2$ .

[Elekes, 1997]

## Application aux bornes **Somme-produit**.

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$  un ensemble de  $n$  entiers.

Notons  $A + A = \{a + b, (a, b) \in A \times A\}$  et  $A \cdot A = \{ab, (a, b) \in A \times A\}$ .

*Si  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  alors  $|A + A|$  est petit mais  $|A \cdot A|$  est grand.*

*Si  $A = \{2, 4, \dots, 2^n\}$  alors  $|A \cdot A|$  est petit mais  $|A + A|$  est grand.*

**Conjecture.** [Erdős-Szemerédi, 1983] Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $C_\epsilon$  telle que si  $|A|$  est suffisamment grand alors  $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq C_\epsilon |A|^{2-\epsilon}$ .

Associer à  $A$  des points  $P = (A + A) \times (A \cdot A)$  et droites  $L = \{y = a(x - b) : a, b \in A\}$ .

Le nombre d'incidence est **au moins**  $|A||L|$ .

*Chaque droite  $y = a(x - b)$  contient chacun des points  $(c + b, a \cdot c)$  pour  $c \in A$ .*

La borne sur les incidences donne  $|A||L| = O(|P|^{2/3}|L|^{2/3})$ .

$|A + A||A \cdot A| = \Omega(|A|^{5/2})$  et donc  $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(|A|^{5/4})$ .

$|P| = |A + A| * |A \cdot A|$  et  $|L| = |A|^2$ .

[Elekes, 1997]

$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Omega(|A|^{14/11})$ .

[Solymosi, 2005]

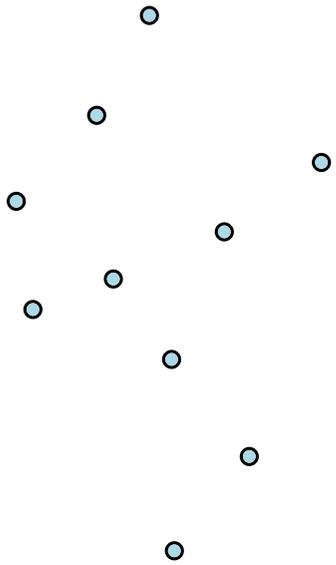
D'autres applications du **crossing lemma** :

- ★ Une distance se répète au maximum  $O(n^{4/3})$  fois parmi  $n$  points.
- ★ Parmi  $n$  points, il y en a toujours un qui détermine  $\Omega(n^{4/5})$  distances **distinctes** aux autres points.
- ★ Le nombre de  $k$ -sets définis par  $n$  points du plan (cf dans 3 transparents).

L'analyse dans le cas le pire par **échantillonnage aléatoire** est souvent efficace.

*Arrangements, polytopes, etc...*  
*"Clarkson-Shor technique".*

1. Arrangements et séquences de Davenport-Schinzel
2. Couvertures multiples et lemme local de Lovász
3. Géométrie des incidences
4. Quelques problèmes ouverts

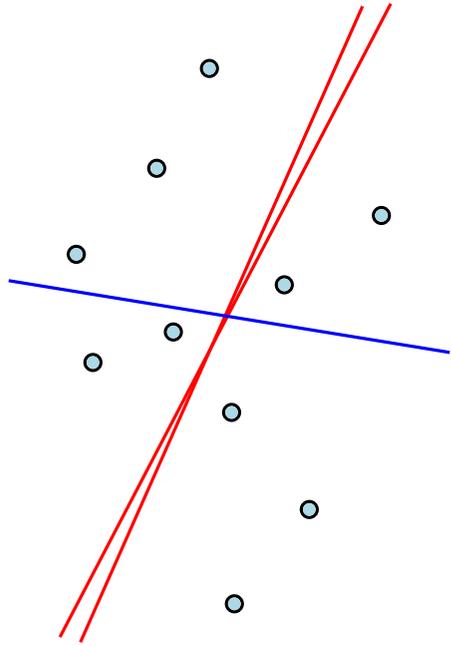


Soit  $P$  un ensemble de  $2n$  points du plan (sans triplet aligné).

**Question.** Quel est le nombre maximum de manières différentes de bisecter  $P$  par une droite ?

[Erdős-Lovász-Simmons-Strauss, 1971]

[Lovász, 1971]

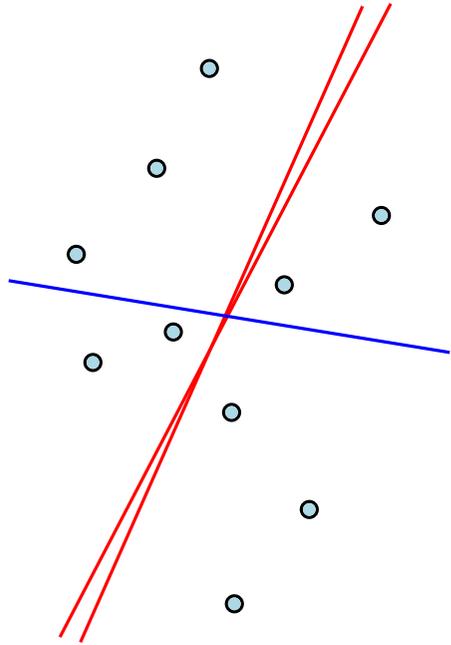


Soit  $P$  un ensemble de  $2n$  points du plan (sans triplet aligné).

**Question.** Quel est le nombre maximum de manières différentes de bisecter  $P$  par une droite ?

[Erdős-Lovász-Simmons-Strauss, 1971]

[Lovász, 1971]



Soit  $P$  un ensemble de  $2n$  points du plan (sans triplet aligné).

**Question.** Quel est le nombre maximum de manières différentes de bisecter  $P$  par une droite ?

[Erdős-Lovász-Simmons-Strauss, 1971]

[Lovász, 1971]

Motivation : analyse d'arrangements, d'algorithmes sur des arrangements, etc...

Bornes connues :  $\Omega(n2^{c\sqrt{\log n}})$  et  $O(n^{4/3})$

[Dey, 1998] [Tóth, 2001] [Nivasch, 2008]

n	4	6	8	10	12	14
# bisections	3	6	7	13	18	22

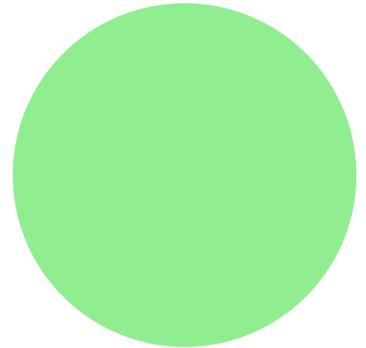
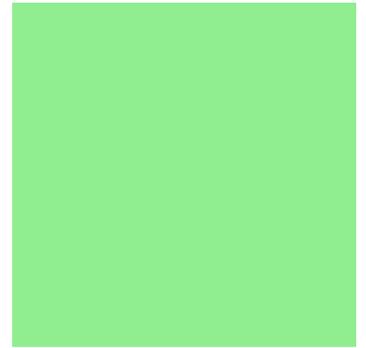
[Andrzejak et al., 1998] [Aischolzer-Krasser, 2001] [Beigelzimer-Radziszowski, 2002]

Modèle de **polytope aléatoire** :

Prendre un convexe  $K$  dans  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^d \dots$

Choisir  $n$  points aléatoires uniformément dans  $K$ .

Définir  $K_n :=$  enveloppe convexe de ces  $n$  points.

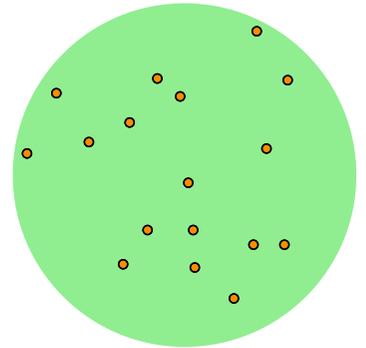
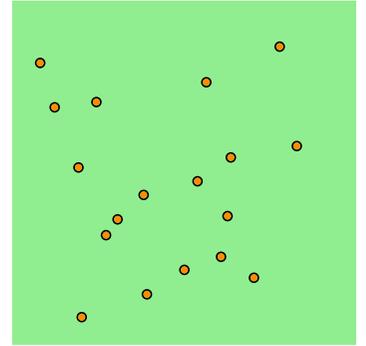


Modèle de **polytope aléatoire** :

Prendre un convexe  $K$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^d \dots$

Choisir  $n$  points aléatoires uniformément dans  $K$ .

Définir  $K_n :=$  enveloppe convexe de ces  $n$  points.

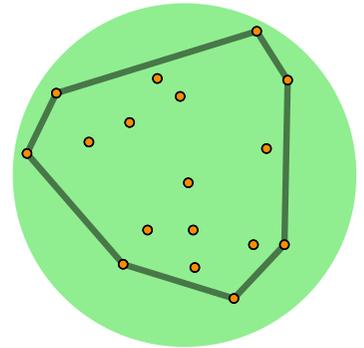
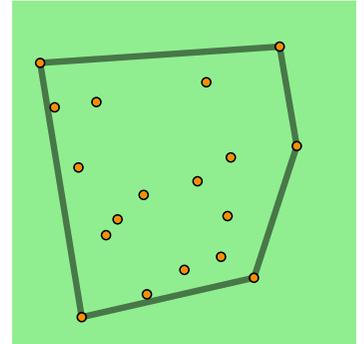


Modèle de **polytope aléatoire** :

Prendre un convexe  $K$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^d \dots$

Choisir  $n$  points aléatoires uniformément dans  $K$ .

Définir  $K_n :=$  enveloppe convexe de ces  $n$  points.



Modèle de **polytope aléatoire** :

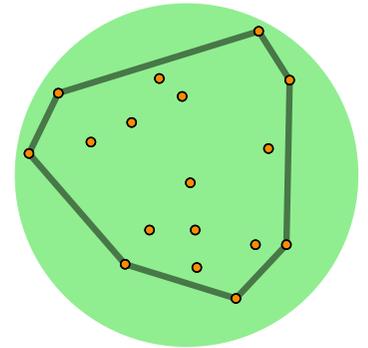
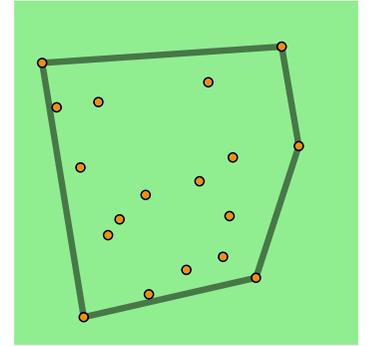
Prendre un convexe  $K$  dans  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^d \dots$

Choisir  $n$  points aléatoires uniformément dans  $K$ .

Définir  $K_n :=$  enveloppe convexe de ces  $n$  points.

Quelle est la **complexité** de  $K_n$  ?

$v_n :=$  nombre de **sommets** de  $K_n$ .



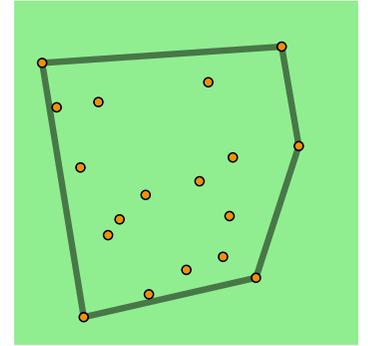
**Question** : Est-ce que  $n \rightarrow E[v_n]$  est croissante (au sens large)  $\forall K$  ?

Modèle de **polytope aléatoire** :

Prendre un convexe  $K$  dans  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^d \dots$

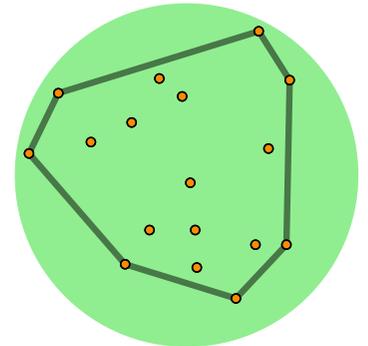
Choisir  $n$  points aléatoires uniformément dans  $K$ .

Définir  $K_n :=$  enveloppe convexe de ces  $n$  points.



Quelle est la **complexité** de  $K_n$  ?

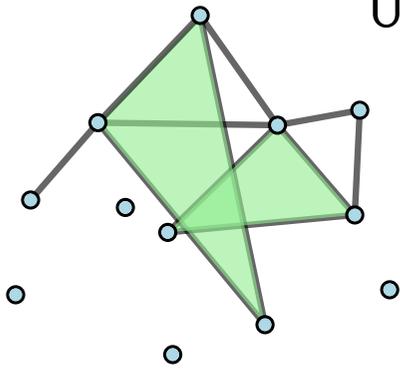
$v_n :=$  nombre de **sommets** de  $K_n$ .



**Question** : Est-ce que  $n \rightarrow E[v_n]$  est croissante (au sens large)  $\forall K$  ?

Oui si  $K$  est un **convexe du plan** et (asymptotiquement) si  $K$  est un **convexe lisse de  $\mathbb{R}^3$** .

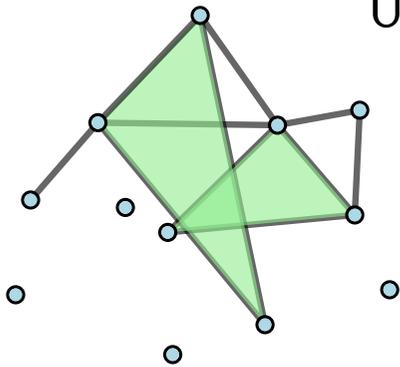
[Devillers et al., 2013]



Un **complexe triangulaire** est une famille de sommets, arêtes, triangles.

**Monotone** : *pour avoir un triangle il est nécessaire d'avoir ses sommets et ses arêtes...*

**Abstrait** : *les sommets sont des singletons, les arêtes des paires, les triangles des triplets.*



Un **complexe triangulaire** est une famille de sommets, arêtes, triangles.

**Monotone** : *pour avoir un triangle il est nécessaire d'avoir ses sommets et ses arêtes...*

**Abstrait** : *les sommets sont des singletons, les arêtes des paires, les triangles des triplets.*

**Folklore** Si un complexe triangulaire se **plonge** dans  $\mathbb{R}^3$  alors  $\#\text{triangles} = O(\#\text{arêtes})$ .

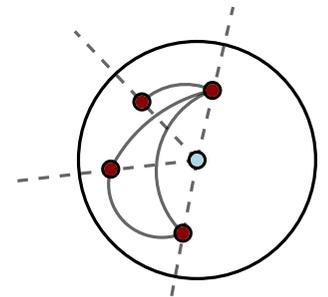
Le voisinage de chaque **sommet** forme un graphe **planaire**.

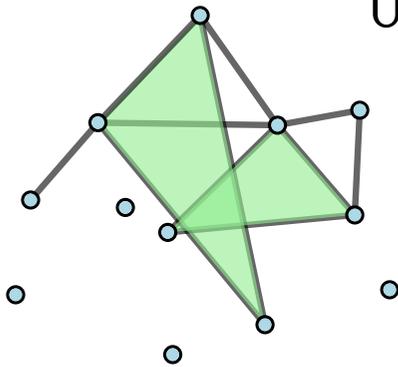
Pour chaque sommet  $v$ ,

$$\#\text{triangles incident à } v \leq 3 \#\text{arêtes incidentes à } v.$$

On somme sur tous les sommets...

$$3 \#\text{triangles} \leq 6 \#\text{arêtes}$$





Un **complexe triangulaire** est une famille de sommets, arêtes, triangles.

**Monotone** : *pour avoir un triangle il est nécessaire d'avoir ses sommets et ses arêtes...*

**Abstrait** : *les sommets sont des singletons, les arêtes des paires, les triangles des triplets.*

**Folklore** Si un complexe triangulaire se **plonge** dans  $\mathbb{R}^3$  alors  $\#\text{triangles} = O(\#\text{arêtes})$ .

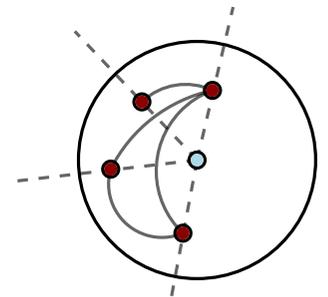
Le voisinage de chaque **sommet** forme un graphe **planaire**.

Pour chaque sommet  $v$ ,

$$\#\text{triangles incident à } v \leq 3 \#\text{arêtes incidentes à } v.$$

On somme sur tous les sommets...

$$3 \#\text{triangles} \leq 6 \#\text{arêtes}$$



**Conjecture.** Si un complexe triangulaire se **plonge** dans  $\mathbb{R}^4$  alors  $\#\text{triangles} = O(\#\text{arêtes})$ .

L'**orientation** d'un **triplet ordonné**  $(p_i, p_j, p_k)$  est

$$Or(p_i, p_j, p_k) = \begin{cases} +1 & \text{si } p_i p_j p_k \text{ est orienté dans le sens trigonométrique,} \\ -1 & \text{si } p_i p_j p_k \text{ est orienté dans le sens horaire.} \end{cases}$$

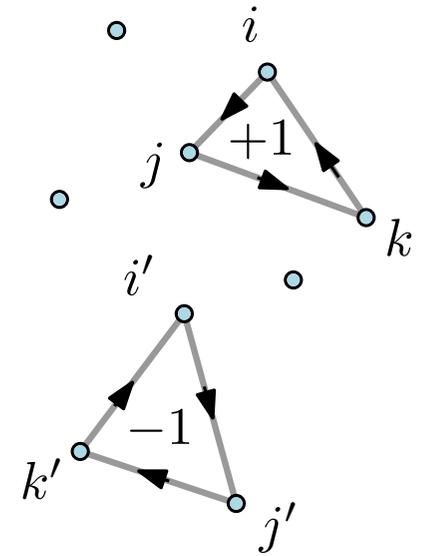
Relation **d'équivalence** sur les familles de points du plan :

*Sans triplet aligné.*

$P \sim Q \Leftrightarrow$  il existe une bijection  $\sigma : P \rightarrow Q$  telle que

$$\forall p, q, r \in P, Or(p, q, r) = Or(\sigma(p), \sigma(q), \sigma(r)).$$

Une classe d'équivalence est un **type d'ordre**.



**Question.** Comment générer aléatoirement uniformément un type d'ordre de taille  $n$  ?

L'**orientation** d'un **triplet ordonné**  $(p_i, p_j, p_k)$  est

$$Or(p_i, p_j, p_k) = \begin{cases} +1 & \text{si } p_i p_j p_k \text{ est orienté dans le sens trigonométrique,} \\ -1 & \text{si } p_i p_j p_k \text{ est orienté dans le sens horaire.} \end{cases}$$

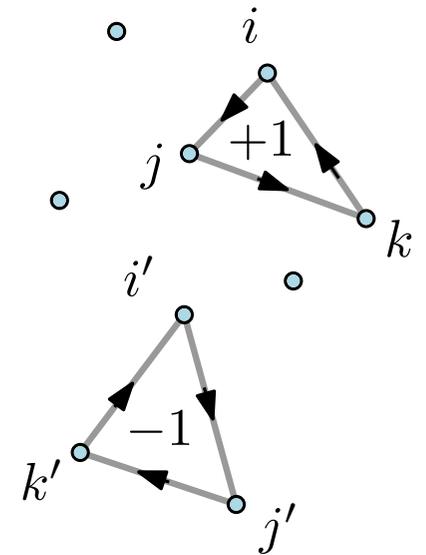
Relation **d'équivalence** sur les familles de points du plan :

*Sans triplet aligné.*

$P \sim Q \Leftrightarrow$  il existe une bijection  $\sigma : P \rightarrow Q$  telle que

$$\forall p, q, r \in P, Or(p, q, r) = Or(\sigma(p), \sigma(q), \sigma(r)).$$

Une classe d'équivalence est un **type d'ordre**.



**Question.** Comment générer aléatoirement uniformément un type d'ordre de taille  $n$  ?

Le nombre de type d'ordre de taille  $n \sim \left(\frac{n}{2}\right)^{4n} \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{\log(n/2)}\right)\right)$

On sait axiomatiser un **sur-ensemble** de taille  $n^{\Theta(n^2)}$ .

*cc-systems de Knuth*

Décider si un élément du sur-ensemble est un type d'ordre est **NP-difficile**.

Pour réaliser tous les types d'ordre de taille  $n$  sur une grille il faut considérer  $\left(2^{2^n}\right)^2$ .

Pour aller plus loin...

Although discrete geometry has a rich history extending more than 150 years, it abounds in open problems that even a high-school student can understand and appreciate. Some of these problems are notoriously difficult and are intimately related to deep questions in other fields of mathematics. But many problems, even old ones, can be solved by a clever undergraduate or a high-school student equipped with an ingenious idea and the kinds of skills used in a mathematical olympiad.

*Research Problems in Discrete Geometry* is the result of a 25-year-old project initiated by the late Leo Moser. It is a collection of more than 500 attractive open problems in the field, many of which can be understood without extensive preparation. The largely self-contained chapters provide a broad overview of discrete geometry, along with historical details and the most important partial results related to these problems. This book is intended as a source book for both professional mathematicians and graduate students who love beautiful mathematical questions, are willing to spend sleepless nights thinking about them, and who would like to get involved in mathematical research.

Important features include:

- More than 500 open problems, some old, others new and never before published;
- Each chapter divided into self-contained sections, each section ending with an extensive bibliography;
- A great selection of research problems for graduate students looking for a dissertation topic;
- A comprehensive survey of discrete geometry, highlighting the frontiers and future of research;
- More than 150 figures;
- A preface to an earlier version written by the late Paul Erdős.



Peter Brass is Associate Professor of Computer Science at the City College of New York.

William O. J. Moser is Professor Emeritus at McGill University.

János Pach is Distinguished Professor at The City College of New York, Research Professor at the Courant Institute, NYU, and Senior Research Fellow at the Rényi Institute, Budapest.



springeronline.com



Springer

BRASS  
MOSER  
PACH

RESEARCH PROBLEMS  
IN DISCRETE GEOMETRY

# RESEARCH PROBLEMS IN DISCRETE GEOMETRY

more interesting. Let  $G$  be an independent set and  $n(G) = |G|$ . Then  $n(G) \leq \log_2 n$ . Glas must be a graph, form of all myself. the number of  $n^2$  and  $(1-n)^2$ . Does it

Открытые Проблемы Дискретной Геометрии

离散几何中的研究问题

مسائل تحقیقی در هندسه گسسته

離散幾何学における研究問題

$\frac{1}{2} n^2$  listoran



BY AIR MAIL  
AÉROGRAMME  
AIR LETTER  
IF SANITIZED IS ENCLOSED  
THIS LETTER WILL BE SENT  
BY REGISTER MAIL

PETER BRASS  
WILLIAM MOSER  
JÁNOS PACH

horizontal may  $d_1, d_2, d_3$  to  $d_4$   
parten ee meg

DEPARTMENT of Math  
UNIVERSITY OF MALAYA  
SINGAPORE, S

# Références

## Exemple introductif

Erdős, *On sets of distances of  $n$  points*, American Mathematical Monthly 53 (5): 248-250, 1946.

Kövári, Sós, Turán, *On a problem of K. Zarankiewicz*, Colloq. Math. 3: 505-7, 1954.

## Séquences de Davenport-Schinzel

Agarwal, Sharir, *Davenport-Schinzel sequences and their geometric applications*, Cambridge Univ. Press, 1995.

Szemerédi, *On a problem of Davenport and Schinzel*, Acta Arithmetica 25: 213-224, 1974.

Tarjan, *Efficiency of a good but not linear set-union algorithm*, Journal of the ACM 22: 215-225, 1975.

Nivasch, *Improved bounds and new techniques for Davenport-Schinzel sequences and their generalizations*,  
Journal of the ACM, 57(3): article 17.

Klazar, *Generalized Davenport-Schinzel sequences: Results, problems, and applications*, Integers 2 (2002), A11.

Agarwal, Sharir, Shor, *Sharp upper and lower bounds for the length of general Davenport-Schinzel sequences*  
Journal of Comb. Theory A, 52: 2282-74, 1989.

Gardy, Gouyou-Beauchamps, *Enumerating Davenport-Schinzel sequences*, ITA 26: 387-402, 1992.

## Lemme local de Lovász et hypergraphes géométriques

Alon, Spencer, *The probabilistic method*, section 5.4, 2nde édition, 2000.

Pach, Tóth, *Decomposition of multiple coverings into many parts*,  
Computational Geometry: Theory and Applications 42(2): 127-133, 2009.

, , \*

, , \*

, , \*

, , \*