

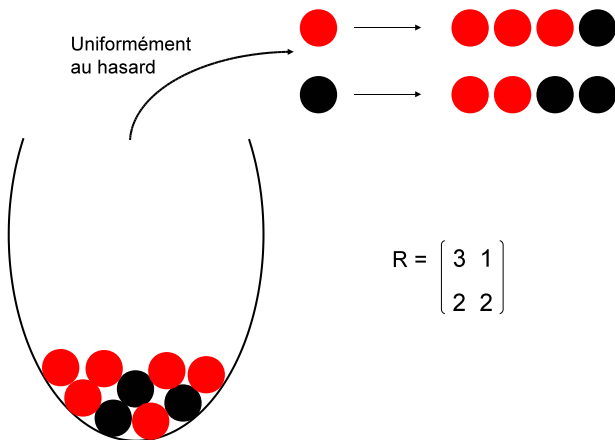
Grandes urnes de Pólya et équations de point fixe

Brigitte Chauvin, Nicolas Pouyanne et Cécile Mailler

Laboratoire de Mathématiques de Versailles
Université de Versailles-Saint-Quentin

22 Mars 2013

Qu'est-ce qu'une urne de Pólya ?



Plus généralement

Une urne de Pólya est décrite par :

- Composition initiale :

$$U_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

- Matrice de remplacement :

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose :

- $a, b, c, d \geq 1$ (non extinction)
- Urne **balancée** : $a + b = c + d = S$

On note :

- m la seconde valeur propre de R
- $\sigma = \frac{m}{S}$ le rapport des deux valeurs propres de R

Théorèmes limites

Vecteur composition :

$$U(n) = \begin{pmatrix} \# \text{ boules rouges au temps } n \\ \# \text{ boules noires au temps } n \end{pmatrix}$$

Théorème [ATHREYA, JANSON, ...] :

- Si $\sigma < \frac{1}{2}$

$$\frac{U(n) - nv_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, \Sigma^2).$$

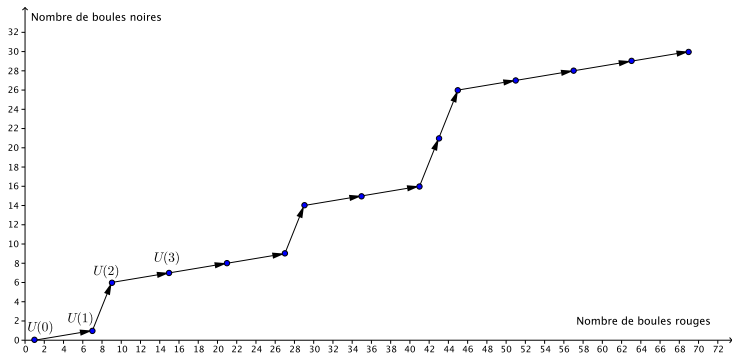
- Si $\sigma > \frac{1}{2}$, alors, p.s. et dans tous les L^p ($p \geq 1$),

$$U(n) = nv_1 + n^\sigma W^{DT} v_2 + o(n^\sigma)$$

où (v_1, v_2) est une base de vecteurs propres de tR (bien choisie), et (u_1, u_2) sa base duale.

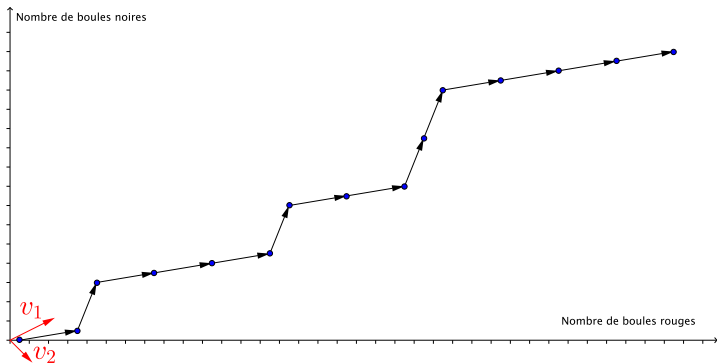
Un exemple de trajectoire

$$U(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$



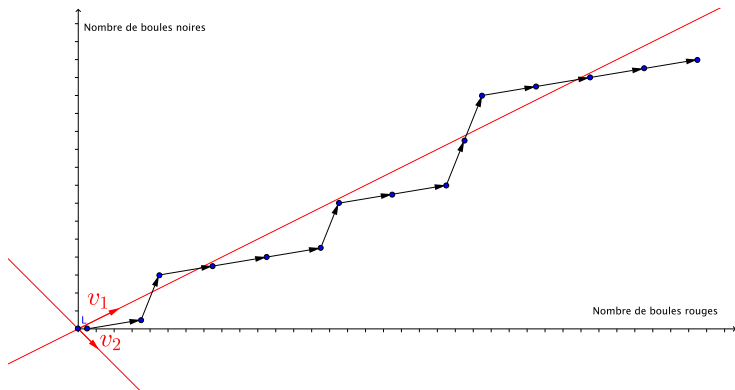
Un exemple de trajectoire

$$U(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$



Un exemple de trajectoire

$$U(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$



Plongement en temps continu

Chaque boule est un réveil qui sonne au bout d'un temps aléatoire de loi $\mathcal{E}xp(1)$, **indépendamment** des autres.

Si l'on note τ_n la date de la $n^{\text{ième}}$ sonnerie,

$$(U(n))_{n \geq 0} \stackrel{\text{(loi)}}{=} (U_{\tau_n}^{CT})_{n \geq 0}.$$

Théorème [ATHREYA, JANSON, ...] :

Si $\sigma > \frac{1}{2}$, asymptotiquement quand n tend vers $+\infty$, p.s. et dans tous les L^p ($p \geq 1$),

$$U^{CT}(t) = e^{St} \xi v_1 (1 + o(1)) + e^{mt} W^{CT} v_2 (1 + o(1)),$$

où ξ est de loi Gamma $\left(\frac{\alpha+\beta}{S}\right)$.

Connexions

On s'intéresse aux variables aléatoires W

$$W_{(\alpha,\beta)}^{DT} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_2 \left(\frac{U_{(\alpha,\beta)}(n)}{n^\sigma} \right) \quad \text{et} \quad W_{(\alpha,\beta)}^{CT} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u_2 \left(\frac{U_{(\alpha,\beta)}^{CT}(t)}{e^{mt}} \right)$$

On sait que (plongement en temps continu) :

$$W_{(\alpha,\beta)}^{CT} \stackrel{(loi)}{=} \xi^\sigma W_{(\alpha,\beta)}^{DT} \quad \text{et} \quad W_{(\alpha,\beta)}^{DT} \stackrel{(loi)}{=} \xi^{-\sigma} W_{(\alpha,\beta)}^{CT},$$

où ξ et les $W_{(\alpha,\beta)}$ sont indépendants dans les deux égalités.

On sait que [CHAUVIN, POUYANNE, SAHNOUN]

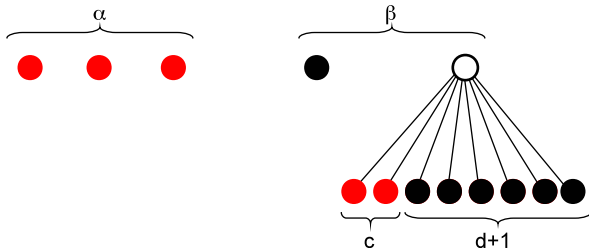
- W^{DT} et W^{CT} admettent une densité sur \mathbb{R}
- on connaît explicitement la transformée de Fourier de W^{CT}
- W^{DT} et W^{CT} ont des lois non symétriques

Urne et forêt



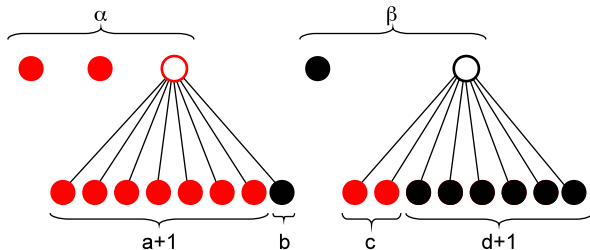
Composition de l'urne = nombre de feuilles dans la forêt.

Urne et forêt



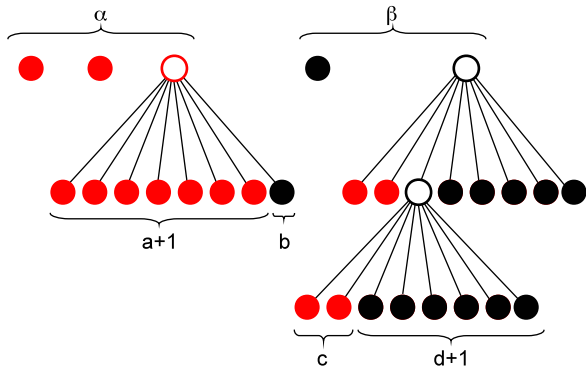
Composition de l'urne = nombre de feuilles dans la forêt.

Urne et forêt



Composition de l'urne = nombre de feuilles dans la forêt.

Urne et forêt



Composition de l'urne = nombre de feuilles dans la forêt.

$D_k(n)$ = nombre de feuilles dans le k^e arbre de la forêt à l'étape n :

$$\frac{D_k(n) - 1}{S} = \text{nombre de pioches dans le } k^e \text{ arbre avant l'étape } n$$

Urne et forêt

$$U_{(\alpha,\beta)}(n) \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^{\alpha} U_{(1,0)}^{(k)} \left(\frac{D_k(n) - 1}{S} \right) + \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} U_{(0,1)}^{(k)} \left(\frac{D_k(n) - 1}{S} \right)$$

Remarque : $(D_1(n), \dots, D_{\alpha+\beta}(n))$ est le vecteur composition d'une urne de composition initiale ${}^t(1, \dots, 1)$ et de matrice de remplacement $S_{I_{\alpha+\beta}}$.

Théorème [ATHREYA] :

$$\frac{1}{nS} (D_1(n), \dots, D_{\alpha+\beta}(n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} (V_1, \dots, V_{\alpha+\beta}),$$

où $(V_1, \dots, V_{\alpha+\beta})$ est un vecteur de loi Dirichlet $(\frac{1}{S}, \dots, \frac{1}{S})$.

Urne et forêt

$$U_{(\alpha,\beta)}(n) \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^{\alpha} U_{(1,0)}^{(k)} \left(\frac{D_k(n) - 1}{S} \right) + \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} U_{(0,1)}^{(k)} \left(\frac{D_k(n) - 1}{S} \right)$$

implique

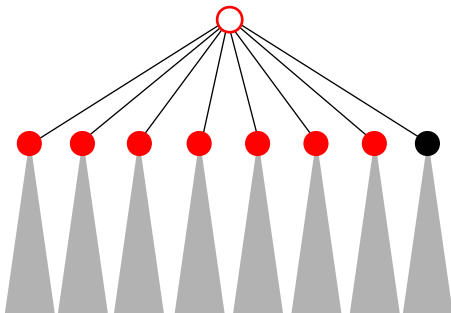
$$u_2 \left(\frac{U_{(\alpha,\beta)}(n)}{n^\sigma} \right) \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^{\alpha} u_2 \left(\frac{1}{n^\sigma} U_{(1,0)}^{(k)} \left(\frac{D_k(n) - 1}{S} \right) \right) + \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} u_2 \left(\frac{1}{n^\sigma} U_{(0,1)}^{(k)} \left(\frac{D_k(n) - 1}{S} \right) \right).$$

et comme

$$W_{(\alpha,\beta)}^{DT} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_2 \left(\frac{U_{(\alpha,\beta)}(n)}{n^\sigma} \right),$$

$$W_{(\alpha,\beta)} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^{\alpha} V_k^\sigma W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} V_k^\sigma W_{(0,1)}^{(k)}.$$

Étude de $W_{(1,0)}$ et $W_{(0,1)}$



$$W_{(1,0)} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^{a+1} V_k^\sigma W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=a+2}^{S+1} V_k^\sigma W_{(0,1)}^{(k)}$$

$$W_{(0,1)} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^c V_k^\sigma W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=c+1}^{S+1} V_k^\sigma W_{(0,1)}^{(k)}$$

Résumé

- on s'est ramenés à l'étude de $W_{(1,0)}$ et $W_{(0,1)}$
- $W_{(1,0)}$ et $W_{(0,1)}$ sont solution d'un système de point fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{(1,0)} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^{a+1} V_k^\sigma W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=a+2}^{S+1} V_k^\sigma W_{(0,1)}^{(k)} \\ W_{(0,1)} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^c V_k^\sigma W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=c+1}^{S+1} V_k^\sigma W_{(0,1)}^{(k)} \end{array} \right.$$

Quelles informations peut-on extraire de ce système ?

En temps continu

On peut faire le même raisonnement “arborescent” :

- on se ramène à l'étude de $W_{(1,0)}$ et $W_{(0,1)}$
- $W_{(1,0)}^{CT}$ et $W_{(0,1)}^{CT}$ sont solution du système de point fixe suivant :

$$\begin{cases} W_{(1,0)} \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^{a+1} W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=a+2}^{S+1} W_{(0,1)}^{(k)} \right) \\ W_{(0,1)} \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^c W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=c+1}^{S+1} W_{(0,1)}^{(k)} \right) \end{cases}$$

où U est uniforme sur $[0, 1]$.

Quelles informations peut-on extraire de ce système ?

Contraction

$\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ = espace des distributions de probabilité de moyenne \mathbf{C} et de carré intégrable muni de la distance de Wasserstein :

$$d_2(\mu, \nu) = \min_{(X_1, X_2)} \left(\mathbb{E}(X_1 - X_2)^2 \right)^{1/2}$$

est un espace métrique complet.

On définit, pour tout $b\mathbf{C}_1 + c\mathbf{C}_2 = 0$,

$$\phi : \mathcal{M}_2(\mathbf{C}_1) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{C}_2) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{C}_1) \times \mathcal{M}_2(\mathbf{C}_2),$$

par

$$\phi(\mu, \nu) = \left(\mathcal{L} \left(U^m \left(\sum_{k=1}^{a+1} X^{(k)} + \sum_{k=a+2}^{S+1} Y^{(k)} \right) \right), \mathcal{L} \left(U^m \left(\sum_{k=1}^c X^{(k)} + \sum_{k=c+1}^{S+1} Y^{(k)} \right) \right) \right)$$

où les $X^{(k)} \sim \mu$ et les $Y^{(k)} \sim \nu$ ($k \geq 1$) sont indépendantes.

Contraction

On montre que ϕ est $\sqrt{\frac{S+1}{2m+1}}$ -Lipschitzienne :

Théorème :

Pour $\sigma > \frac{1}{2}$, les systèmes de points fixes en temps discret et en temps continu admettent une unique solution en loi dans $(\mathcal{M}_2(\mathcal{C}_1) \times \mathcal{M}_2(\mathcal{C}_2), d_2 \otimes d_2)$.

Remarque : Les moyennes des W sont connues.

Moments de W^{CT}

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{(1,0)} \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^{a+1} W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=a+2}^{S+1} W_{(0,1)}^{(k)} \right) \\ W_{(0,1)} \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^c W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=c+1}^{S+1} W_{(0,1)}^{(k)} \right) \end{array} \right.$$

Propriété [CHAUVIN, POUYANNE, SAHNOUN] :

Les transformées de Laplace de $W_{(1,0)}^{CT}$ et $W_{(0,1)}^{CT}$ ont un rayon de convergence nul. Autrement dit, pour toute constante $C > 0$, pour tout p suffisamment grand,

$$C^p \leq \frac{\mathbb{E}|W^{CT}|^p}{p!}.$$

Moments de W^{CT}

$$\begin{cases} W_{(1,0)} \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^{a+1} W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=a+2}^{S+1} W_{(0,1)}^{(k)} \right) \\ W_{(0,1)} \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^c W_{(1,0)}^{(k)} + \sum_{k=c+1}^{S+1} W_{(0,1)}^{(k)} \right) \end{cases}$$

Propriété :

$W_{(1,0)}^{CT}$ et $W_{(0,1)}^{CT}$ admettent tous leurs moments et les suites $\left(\frac{\mathbb{E}|W^{CT}|^p}{p! \ln^p p} \right)^{1/p}$ sont bornées. Les variables $W_{(1,0)}^{CT}$ et $W_{(0,1)}^{CT}$ sont donc déterminées par leurs moments.

Via les martingale connexions :

$W_{(1,0)}^{DT}$ et $W_{(0,1)}^{DT}$ sont déterminées par leurs moments.

Via l'expression de $W_{(\alpha,\beta)}$ en fonction de $W_{(1,0)}$ et $W_{(0,1)}$:

$W_{(\alpha,\beta)}$ est déterminée par ses moments.

Densités :

Les variables W admettent toutes une densité sur \mathbb{R} .

Soit $\psi_W(t) = \mathbb{E}e^{itW}$ la transformée de Fourier de W .

Si cette transformée de Fourier est inversible, alors W admet une densité, qui est l'inverse de la transformée de Fourier.

- Si ψ_W est L^2 , alors c'est ok. Mais ψ_W n'est pas L^2 ...

Densités :

Les variables W admettent toutes une densité sur \mathbb{R} .

Soit $\psi_W(t) = \mathbb{E}e^{itW}$ la transformée de Fourier de W .

Si cette transformée de Fourier est inversible, alors W admet une densité, qui est l'inverse de la transformée de Fourier.

- Si ψ_W est L^2 , alors c'est ok. Mais ψ_W n'est pas L^2 ...
- Si ψ_W est L^1 , alors c'est ok. Mais ψ_W n'est pas L^1 ...

Densités :

Les variables W admettent toutes une densité sur \mathbb{R} .

Soit $\psi_W(t) = \mathbb{E}e^{itW}$ la transformée de Fourier de W .

Si cette transformée de Fourier est inversible, alors W admet une densité, qui est l'inverse de la transformée de Fourier.

- Si ψ_W est L^2 , alors c'est ok. Mais ψ_W n'est pas L^2 ...
- Si ψ_W est L^1 , alors c'est ok. Mais ψ_W n'est pas L^1 ...
- Si ψ'_W est L^1 et si $t \mapsto \frac{\psi_W(t)}{t}$ est L^1 alors c'est ok. Ouf!

Analyse de Fourier

Point de départ : le système en loi vérifié par les lois de $W_{(1,0)}^{CT}$ et $W_{(0,1)}^{CT}$

$$\begin{cases} X \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^{a+1} X^{(k)} + \sum_{k=a+2}^{S+1} Y^{(k)} \right) \\ Y \stackrel{(loi)}{=} U^m \left(\sum_{k=1}^c X^{(k)} + \sum_{k=c+1}^{S+1} Y^{(k)} \right) \end{cases}$$

implique

$$\begin{cases} \psi_X(t) = \mathbb{E} \left[\psi_X(U^m t)^{a+1} \psi_Y(U^m t)^b \right] \\ \psi_Y(t) = \mathbb{E} \left[\psi_X(U^m t)^c \psi_Y(U^m t)^{d+1} \right] \end{cases}$$

Système que l'on peut dériver (dérivation sous le signe intégral). On a des informations sur ψ_W et sur ψ'_W on en déduit l'inversion et donc l'existence d'une densité pour les variables W .

Demi-conclusion

La structure arborescente nous permet

- de se ramener à l'étude des deux urnes dont la composition initiale est réduite à une boule,
- d'écrire des systèmes d'équation en loi qui caractérisent les variables W ,
- d'appliquer à ces systèmes des méthodes usuelles (cf. *smoothing equations* dans la littérature [LIU, ...]),
- de montrer l'existence d'une densité via ce système,
- d'étudier les moments de ces variables.

Demi-conclusion

La structure arborescente nous permet

- de se ramener à l'étude des deux urnes dont la composition initiale est réduite à une boule,
- d'écrire des systèmes d'équation en loi qui caractérisent les variables W ,
- d'appliquer à ces systèmes des méthodes usuelles (cf. *smoothing equations* dans la littérature [LIU, ...]),
- de montrer l'existence d'une densité via ce système,
- d'étudier les moments de ces variables.

Est-ce généralisable pour des urnes à d couleurs ?

Définitions

$$U_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

On suppose :

- $\forall i, j, a_{i,j} \geq 0$ (non extinction)
- l'urne est **balancée** : $\forall i, \sum_{j=1}^d a_{ij} = S$

Vecteur composition :

$$U(n) = \begin{pmatrix} \# \text{ boules de type 1 à l'étape } n \\ \vdots \\ \# \text{ boules de type } d \text{ à l'étape } n \end{pmatrix}$$

Grandes valeurs propres

On écrit R sous forme de Jordan : $R = \text{diag}(J_1, \dots, J_r)$ avec

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Choisissons un bloc de Jordan

- soit $\nu + 1$ la taille de ce bloc de Jordan,
- soit E le sous-espace stable associé à ce bloc de Jordan,
- soit λ la valeur propre associée à ce bloc de Jordan
- soit $v \in E$ un vecteur propre unitaire pour λ .

On supposera que λ est une **grande** valeur propre de R , i.e. telle que

$$\sigma = \frac{\text{Re}\lambda}{S} > \frac{1}{2}.$$

Théorèmes limites

Théorème [POUYANNE] :

Il existe une variable aléatoire complexe W^{DT} telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi_E(U(n))}{n^{\lambda/s} \ln^\nu n} = \frac{1}{\nu!} W^{DT} \nu.$$

Plongement en temps continu :

Théorème [JANSON] :

Il existe une variable aléatoire complexe W^{CT} telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi_E(U(t))}{e^{\lambda t} t^\nu} = \frac{1}{\nu!} W^{CT} \nu.$$

Connexions :

$$W^{CT} \stackrel{(loi)}{=} S^\nu \xi^{\lambda/s} W^{DT} \quad \text{et} \quad W^{DT} \stackrel{(loi)}{=} S^{-\nu} \xi^{-\lambda/s} W^{CT}.$$

Structure arborescente

- On se ramène à l'étude de $(W_{\mathbf{e}_i})_{i=1..d}$, où \mathbf{e}_i correspond à la composition initiale "une boule de type i ".
- Les d variables $W_{\mathbf{e}_i}$ sont solution d'un système de d équations en loi.
- On se place dans $\times_{i=1}^d \mathcal{M}_2(m_i)$ muni de la distance de Wasserstein : il y a unicité de la solution du système de point fixe.
- Que peut-on en déduire sur la loi de $W_{\mathbf{e}_i}$?
 - densité ?
 - moments ?

Structure arborescente

- On se ramène à l'étude de $(W_{\mathbf{e}_i})_{i=1..d}$, où \mathbf{e}_i correspond à la composition initiale "une boule de type i ".
- Les d variables $W_{\mathbf{e}_i}$ sont solution d'un système de d équations en loi.
- On se place dans $\times_{i=1}^d \mathcal{M}_2(m_i)$ muni de la distance de Wasserstein : il y a unicité de la solution du système de point fixe.
- Que peut-on en déduire sur la loi de $W_{\mathbf{e}_i}$?
 - densité ?
 - moments ?

Merci de votre attention !