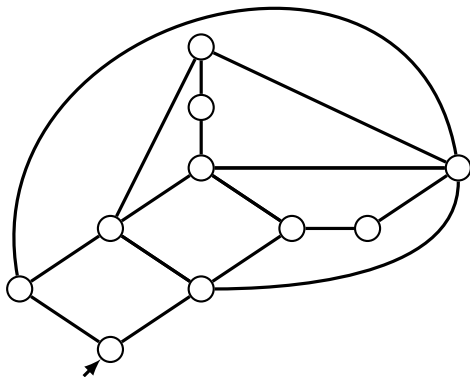


Une généralisation de la relation des quadrangulations pour l'énumération asymptotique des hypercartes

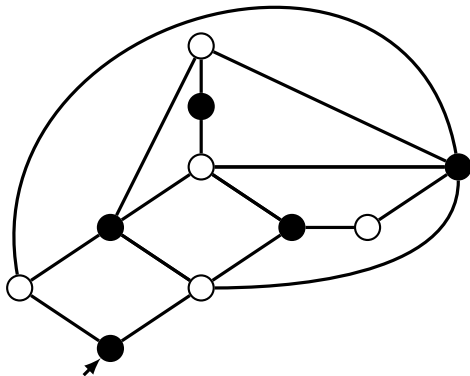
Wenjie Fang, LIAFA

Journées ALEA
21 mars 2013, CIRM, Marseille

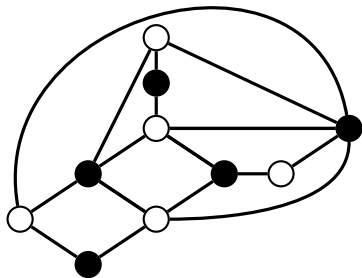
Une quadrangulation planeaire



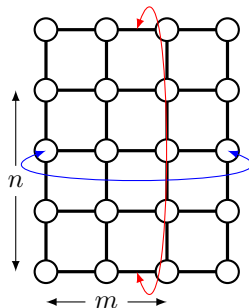
... est toujours bipartie.



Ce n'est plus vrai en genre supérieur.



Cas planaire



Cas $g = 1$ (un tore)

Relation des quadrangulations

On note $Q_n^{(g)}$ et $B_n^{(g,k)}$ le nombre des quadrangulations (resp. biparties avec des sommets marqués) avec :

- n le nombre d'arêtes
- g le genre
- k le nombre de sommets noirs marqués

Théorème (La relation de quadrangulation (Jackson et Visentin, 1990))

On a la relation suivante.

$$Q_n^{(g)} = 2^{2g} B_n^{(g,0)} + 2^{2g-2} B_n^{(g-1,2)} + 2^{2g-4} B_n^{(g-2,4)} \dots$$

*Pour le cas **planaire**, la relation est réduite à*

$$Q_n^{(0)} = B_n^{(0,0)}.$$

Asymptotique des quadrangulations

On admet que le nombre des quadrangulations biparties au genre g est asymptotiquement $\Theta(n^{\frac{5}{2}(g-1)} \rho^n)$.

Théorème (La relation de quadrangulation (Jackson et Visentin, 1990))

On a la relation suivante.

$$Q_n^{(g)} = 2^{2g} B_n^{(g,0)} + 2^{2g-2} B_n^{(g-1,2)} + 2^{2g-4} B_n^{(g-2,4)} \dots$$

C'est le premier terme qui domine, $Q_n^{(g)} \sim 2^{2g} B_n^{(g,0)}$.

Corollaire

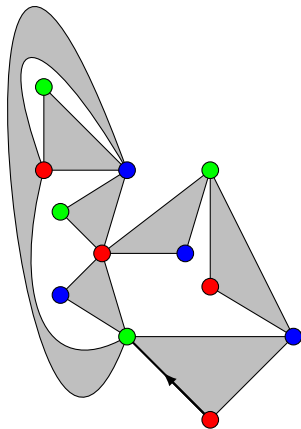
La probabilité qu'une quadrangulation aléatoire au genre g soit bipartie converge vers $(1/2)^{2g}$ quand la taille tend vers l'infini.

Généralisation en constellations

Les m -**constellations** peuvent être vues comme une généralisation de carte bipartie avec plus de couleurs.

(c.f. Lando et Zvonkin (2004), aussi Bousquet-Mélou et Schaeffer (2000) et Bouttier, Di Francesco et Guitter (2004))

On peut aussi définir les m -**hypercartes** comme la version sans coloriage.



Lien entre constellations et hypercartes

On note $C_{n,m}^{(g,a_1,\dots,a_{m-1})}$ le nombre des m -constellations de genre g avec n hyperarêtes et a_i sommets de couleur i marqués pour chaque i . On note similairement $H_{n,m}^{(g)}$ pour les m -hypercartes.

Théorème (Résultat principal (W.F.))

Les nombres des constellations et des hypercartes sont reliés par la relation suivante.

$$H_{n,m}^{(g)} = \sum_{i=0}^g m^{2g-2i} \sum_{a_1+\dots+a_{m-1}=2i} c_{a_1,\dots,a_{m-1}}^{(m)} C_{n,m}^{(g-i,a_1,\dots,a_{m-1})},$$

Les coefficients sont tous entiers positifs.

Coefficients en forme explicite

Les coefficients s'écrivent explicitement.

Théorème (Résultat principal, cas $m = 3, 4$, coefficients explicites)

$$H_{n,3,D}^{(g)} = \sum_{i=0}^g 3^{2g-2i} \sum_{l=0}^{2i} \frac{2 \cdot 2^l + (-1)^l}{3} C_{n,3,D}^{(g-i,l,2i-l)},$$

$$H_{n,4,D}^{(g)} = \sum_{i=0}^g 4^{2g-2i} \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 0 \\ l_1 + l_2 \leq 2i}} \frac{2(3^{l_1} 2^{l_2} + 2^{l_2} (-1)^{l_1})}{4} C_{n,4,D}^{(g-i,l_1,l_2,2i-l_1-l_2)}.$$

Application au comptage asymptotique

D'après Chapuy (2009), le nombre $C_{n,m}^{(g)} = C_{n,m}^{(g,0,\dots,0)}$ des m -constellations est de l'ordre $\Theta(n^{\frac{5}{2}(g-1)} \rho_m^n)$ quand n tend vers l'infini. On retrouve alors le résultat suivant, donné par Chapuy (2009).

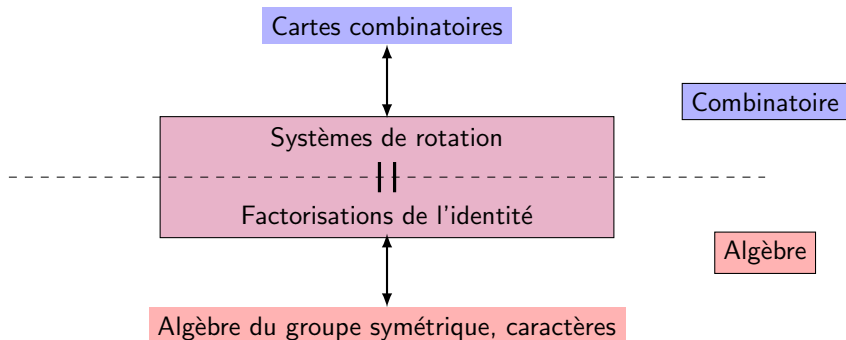
Corollaire (Comportement asymptotique des m -hypercartes)

Quand n tend vers l'infini,

$$H_{n,m}^{(g)} \sim m^{2g} C_{n,m}^{(g)}.$$

La probabilité qu'une m -hypercarte aléatoire au genre g soit une m -constellation converge vers $(1/m)^{2g}$ quand la taille tend vers l'infini.

Approche algébrique



Exemple : Goupil et Schaeffer (1998), Goulden et Jackson (2008), Poulalhon et Schaeffer (2002), Goulden, Guay-Paquet et Novak (2012), etc...

Factorisation de $\chi_{[(2a)^l]}^\theta$

Pour l'énumération des quadrangulations, les caractères de la forme $\chi_{[(2a)^l]}^\theta$ apparaissent. On peut les factoriser en des caractères dans des groupes plus petits.

Théorème (Factorisation de caractère (Jackson et Visentin))

Soient a, l entiers positifs et $\theta \vdash 2an$. On a

$$\chi_{[(2a)^n]}^\theta = \operatorname{sgn}(\pi_\theta \pi'_\theta) n! \frac{1}{l_1! l_2!} \chi_{[a^{l_1}]}^{\theta^{(1)}} \chi_{[a^{l_2}]}^{\theta^{(2)}}.$$

Ici $l_1 + l_2 = n$, les l_s et les $\theta^{(s)}$ ne dépendent que de θ .

C'est qui fait marcher la preuve.

Notre généralisation a besoin d'une factorisation beaucoup plus compliquée, pour les caractères de la forme $\chi_{m\lambda}^\theta$.

Merci de votre attention

... et à FPSAC 2013!