

# Inversion de Lagrange multivariée et lemme cyclique

Axel Bacher   Gilles Schaeffer

22 mars 2013

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Inversion de Lagrange
  - Inversion de Lagrange multivariée
  - Arbres colorés
- 2 Codes de Prüfer
  - Compositions d'arbres de Cayley
  - Codes de Prüfer
- 3 Description de la bijection
  - Objets intermédiaires
  - Premier cas
  - Deuxième cas

# Inversion de Lagrange

## Théorème (inversion de Lagrange)

Soit  $f(x)$  la série définie par l'équation :

$$f(x) = xg(f(x)).$$

Les coefficients de la série  $h(f(x))$  sont :

$$[x^n]h(f(x)) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]h'(x)g(x)^n.$$

# Inversion de Lagrange

## Théorème (inversion de Lagrange)

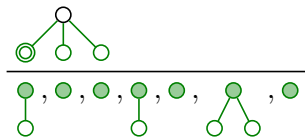
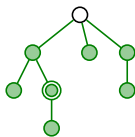
Soit  $f(x)$  la série définie par l'équation :

$$f(x) = xg(f(x)).$$

Les coefficients de la série  $h(f(x))$  sont :

$$[x^n]h(f(x)) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]h'(x)g(x)^n.$$

- Preuve bijective par le **lemme cyclique** :



# Inversion de Lagrange multivariée

## Théorème [Goulden, Kulkarni 97 ; Bender, Richmond 98]

Soit  $\mathbf{f} = f_1, \dots, f_k$  les séries en  $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_k$  définies pour  $i = 1, \dots, k$  par :

$$f_i = x_i g_i(\mathbf{f}).$$

Soit  $\mathbf{n} = n_1, \dots, n_k$ . On a :

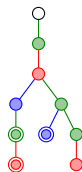
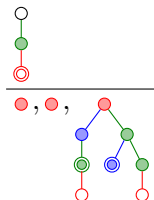
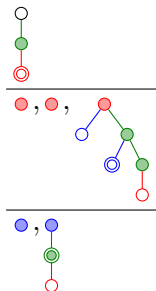
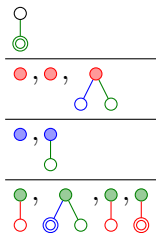
$$[\mathbf{x}^{\mathbf{n}}] g_0(\mathbf{f}) = \frac{1}{\mathbf{n}} [\mathbf{x}^{\mathbf{n}-1}] \sum_C \partial_C(g_0 \mathbf{g}^{\mathbf{n}}),$$

avec, pour  $C$  un arbre de Cayley sur  $\{0, \dots, k\}$  enraciné en 0,

$$\partial_C(g_0 \mathbf{g}^{\mathbf{n}}) = \prod_{i=0}^k \left[ \left( \prod_{(i,j) \in C} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g_i^{n_i} \right].$$

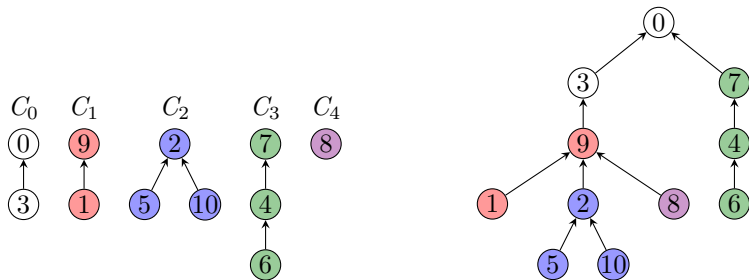


## Objets intermédiaires



- Stratégie : trouver une **bijection** entre ces objets.
- Deux ingrédients : **lemme cyclique** et **codes de Prüfer**.

# Compositions d'arbres de Cayley

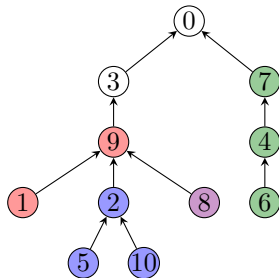


- Une **composition** des arbres  $C_0, \dots, C_r$  est un arbre  $C$  ayant les  $C_i$  comme sous-graphes orientés.
- On note  $q$  le mot où  $q_i$  est le **père de la racine de  $C_i$**  :

$$q = 3909.$$



# Code de Prüfer d'une composititon

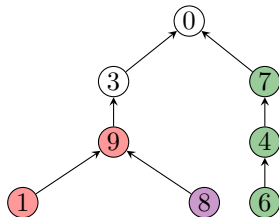


- Code de Prüfer  $p$  :

$p =$

[Prüfer 1918]

# Code de Prüfer d'une composititon

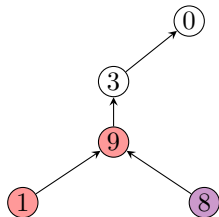


- Code de Prüfer  $p$  :

$$p = 9$$

[Prüfer 1918]

# Code de Prüfer d'une composititon

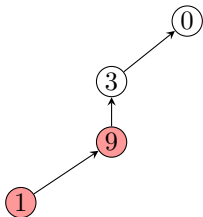


- Code de Prüfer  $p$  :

$$p = 90$$

[Prüfer 1918]

# Code de Prüfer d'une composititon

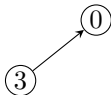


- Code de Prüfer  $p$  :

$$p = 909$$

[Prüfer 1918]

# Code de Prüfer d'une composititon

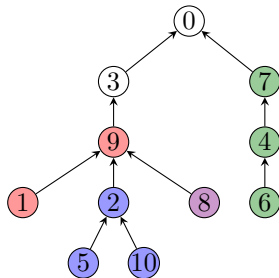


- Code de Prüfer  $p$  :

$$p = 9093.$$

[Prüfer 1918]

# Code de Prüfer d'une composititon



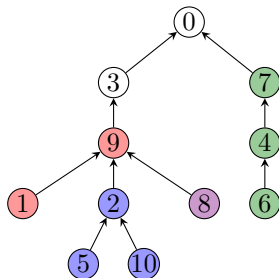
- Code de Prüfer  $p$  :

$$p = 9093.$$

[Prüfer 1918]

- La transformation  $C \mapsto p$  est **bijjective**.

# Code de Prüfer d'une composition



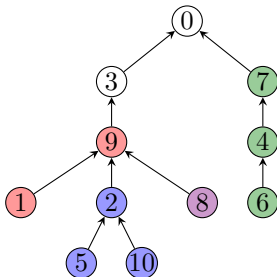
- Code de Prüfer  $p$  :

$$p = 9093.$$

[Prüfer 1918]

- La transformation  $C \mapsto p$  est **bijjective**.
- Composition **enracinée en 0**  $\iff p_r \in C_0$ .

# Code de Prüfer d'une composition



- Code de Prüfer  $p$  :

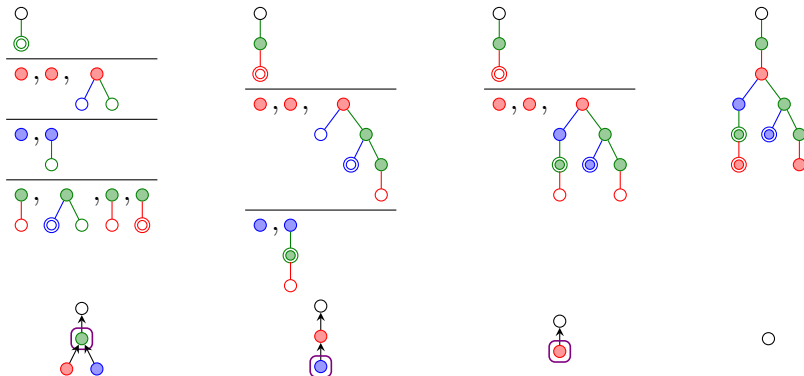
$$p = 9093.$$

[Prüfer 1918]

- La transformation  $C \mapsto p$  est **bijjective**.
- Composition **enracinée en 0**  $\iff p_r \in C_0$ .
- Les codes  $p$  et  $q$  sont reliés par **une permutation**.

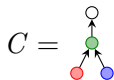
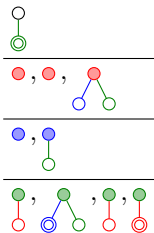


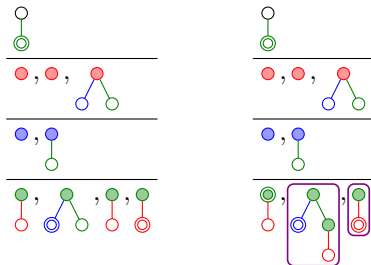
## Objets intermédiaires



- À chaque étape, on distingue deux cas :
  - 1 la couleur courante **n'est pas une feuille** de  $C$  (●);
  - 2 la couleur courante **est une feuille** de  $C$  (○, ●).

# Premier cas : ● n'est pas une feuille de $C$

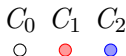
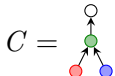
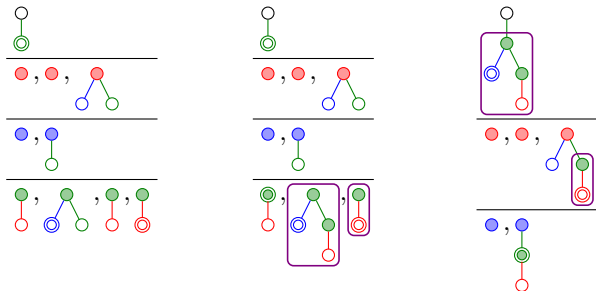


Premier cas : ● n'est pas une feuille de  $C$ 

$$C = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad \bullet \end{array} \quad C_0 \quad C_1 \quad C_2$$

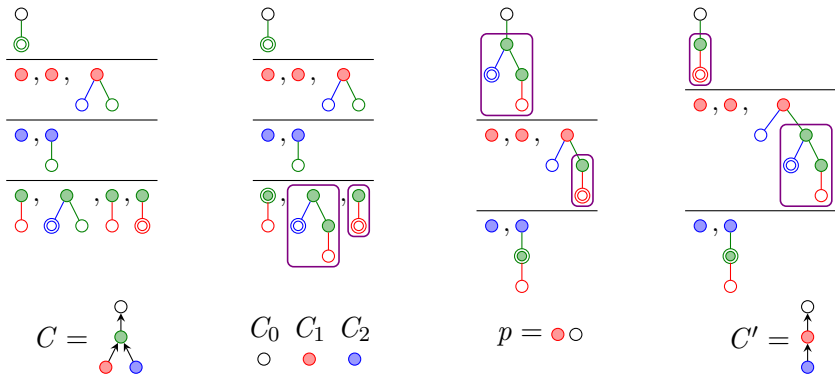
$$\quad \circ \quad \bullet \quad \bullet$$

- On **forme les arbres** de couleur ● avec le lemme cyclique.  
On note  $C_0, \dots, C_r$  les composantes de  $C \setminus \{\bullet\}$ .

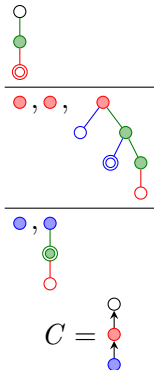
Premier cas : ● n'est pas une feuille de  $C$ 

$$p = \bullet \circ$$

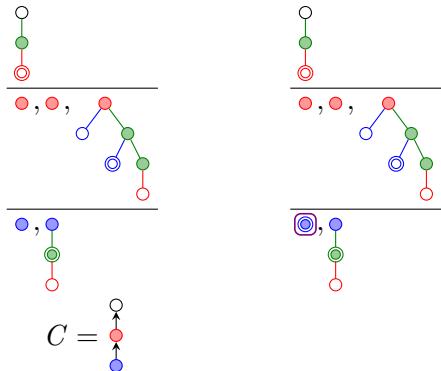
- On **forme les arbres** de couleur ● avec le lemme cyclique.  
On note  $C_0, \dots, C_r$  les composantes de  $C \setminus \{\bullet\}$ .
- On **attache** l'arbre correspondant à  $C_r$  à la marque ●.  
On lit les couleurs  $p_1, \dots, p_r$ .

Premier cas : ● n'est pas une feuille de  $C$ 

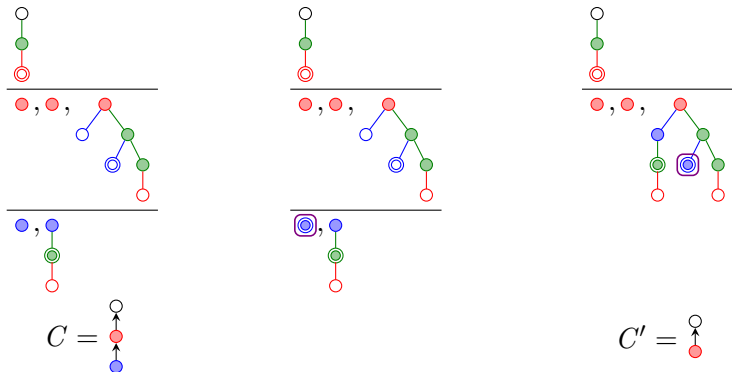
- On **forme les arbres** de couleur ● avec le lemme cyclique. On note  $C_0, \dots, C_r$  les composantes de  $C \setminus \{\bullet\}$ .
- On **attache** l'arbre correspondant à  $C_r$  à la marque ●.
- On lit les couleurs  $p_1, \dots, p_r$ .
- Soit  $C'$  la composition de code de Prüfer  $p$ . On **permuté** les arbres pour que les marques suivent l'arbre  $C'$ .

Deuxième cas : ● est une feuille de  $C$ 

## Deuxième cas : ● est une feuille de $C$



- On **forme les arbres** de couleur ● avec le lemme cyclique.

Deuxième cas : ● est une feuille de  $C$ 

- On **forme les arbres** de couleur ● avec le lemme cyclique.
  - On **attache** l'arbre contenant le nœud ● à la marque ●.
- On pose  $C' = C \setminus \{\bullet\}$ .